

Übungsblatt 7

für das Tutorium am 12.05.2017

1. Endlicher geladener Stab und Multipolmomente

Im Plenum haben wir gesehen, dass ein geladener, zur z -Achse parallel ausgerichteter und unendlich langer Stab der Linienladungsdichte τ das Potenzial

$$\Phi(x, y, z) = -2\tau \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/c) \quad (1)$$

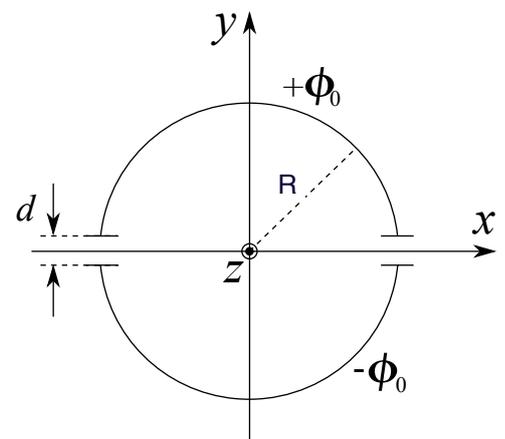
erzeugt, wobei c eine beliebige Konstante (Eichfreiheit) ist. Betrachten Sie im Folgenden einen endlichen Stab mit Gesamtladung Q , der von $z = -L$ bis $z = L$ verläuft.

- Berechnen Sie (z.B. mittels Green-Funktionen) das Potenzial für $z = 0$.
Hinweis: Überlegen Sie welche Symmetrien vorliegen und wählen Sie geeignete Koordinaten, $\int d\alpha/\sqrt{1+\alpha^2} = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$
- Berechnen Sie die ersten zwei nichtverschwindenden Terme von $\Phi(x, y, 0)$ in der Reihenentwicklung für $\rho \gg L$. Finden Sie den führenden Term von $\Phi(x, y, 0)$ im Limes $\rho \ll L$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis für den unendlich langen Stab.
- Berechnen Sie die ersten beiden nichtverschwindenden Terme des Potenzials in einer kartesischen Multipolentwicklung.
- Berechnen Sie die ersten beiden nichtverschwindenden Terme des Potenzials mittels Kugelflächenfunktionen. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von den vorherigen Unterpunkten. Hinweis: Raten Sie die relevanten Multipolmomente durch Ausnutzen der Symmetrien.

2. Geteilter Kreiszyylinder A: Dirichlet Green-Funktion

Ein unendlich langer unendlich dünnwandiger leitender Kreiszyylinder mit dem Radius R ist durch einen Schnitt längs seiner Achse in zwei Hälften geteilt, welche voneinander durch einen schmalen Spalt der Breite d , $d \ll R$, isoliert sind und auf den Potentialen $+\Phi_0$ bzw. $-\Phi_0$ gehalten werden (siehe Abbildung).

Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\rho, \varphi)$ mittels der Dirichlet Green-Funktion. Vernachlässigen Sie den Spalt in dieser Rechnung



Anleitung: Ermitteln Sie die Dirichlet Green-Funktion indem Sie die Lösung des entsprechenden Bildladungsproblems verwenden. Im Plenum wurde gezeigt, dass das Potential eines unendlich ausgedehnten geladenen Stabs der Linienladungsdichte τ an der Position (a, b) in Anwesenheit eines geraden zylindrischen Leiters durch

$$\Phi(x, y) = -2\tau \ln \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2 a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y - \frac{R^2 b}{a^2 + b^2}\right)^2}} \right) - 2\tau \ln \left(\frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (2)$$

gegeben ist. Verwenden Sie Polarkoordinaten (auch für Position der Quellen und Bildquellen). Zeigen Sie die Symmetrie der Dirichlet Green-Funktion. Verwenden Sie schließlich

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{1 - \alpha \cos(\varphi - \varphi')} - \int_\pi^{2\pi} \frac{d\varphi'}{1 - \alpha \cos(\varphi - \varphi')} = \frac{4 \arctan \left(\frac{\alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right)}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (3)$$

3. Geteilter Kreiszyylinder B: Vollständige Funktionensysteme in der Ebene

- Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\rho, \varphi)$ mittels eines geeigneten vollständigen Funktionensystems.
- Berechnen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(\varphi)$ auf dem leitenden Zylinder.
- Berechnen Sie die Ladung pro Längeneinheit auf den Kreiszyylinderhälften sowie die Kapazität dieser Anordnung pro Längeneinheit.

Anleitung: Der Spalt soll nur bei Punkt (c) berücksichtigt werden, bei den Punkten (a) und (b) soll er ignoriert werden. Als Ansatz im Inneren kann verwendet werden $\Phi(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi] \left(\frac{\rho}{R}\right)^m$. Siehe hierzu auch Beispiel 14.3. im Lehrbuch "Theoretische Physik" von M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan & A. Wipf

Verwenden Sie ferner die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \sin \varphi}{1 - p^2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad p^2 \leq 1. \quad (4)$$

Bei Punkt (c) soll der führende Term der Kapazität angegeben werden (Winkelfunktionen im Ergebnis für $d \ll R$ entwickeln).

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2, 3a, 3bc