

# Repetitorium 4

In der Vorlesung 3 haben wir uns ein wenig näher mit Spannungsquellen, Stromquellen und der Zusammenschaltung von Widerständen beschäftigt. Die heutige Vorlesung ist der Zusammenschaltung mehrerer Quellen und Widerstände sowie ersten praktischen Überlegungen gewidmet.

Hinweis zu den Quellen: Manche Abbildungen sind der deutschen und englischen Wikipedia entnommen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird dies nicht jedes Mal einzeln angegeben.

## Die Kennlinie

Eine Kennlinie ist in der Elektrotechnik die graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Stromstärke, der für ein Bauteil, eine Baugruppe oder ein Gerät kennzeichnend ist. Häufig, aber keineswegs immer wird die Spannung als wählbare Größe auf der x – Achse aufgetragen und der Strom als Funktionswert auf der y – Achse.

**Bei jedem Diagramm als erstes auf die Achsenbeschriftungen schauen! Die Zuordnungen sind keinesfalls heilig und dem Zeitgeist, der jeweiligen Anwendung und den Vorstellungen der Verfasserin/ des Verfassers unterworfen.**

## Grundlagen der linearen Netze

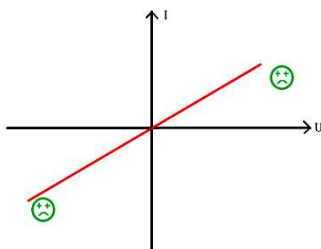
Ein theoretisch wie praktisch extrem wichtiges Thema in der Schaltungsanalyse sind die linearen Netze: Spannungsteiler, Helmholtz-Thévenin-Theorem, Mayer-Norton-Theorem, Superpositionsprinzip. Deren unabdingbare Voraussetzung ist die Linearität der einbezogenen Bausteine. Wir erinnern uns an die Linearitäts – Axiome der Linearen Algebra:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(s \cdot \vec{x}) = s \cdot f(\vec{x})$$

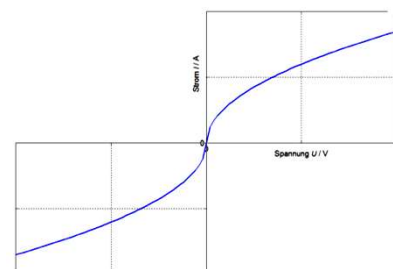
Wobei  $\vec{x}, \vec{y}$  Vektoren bzw. Variablen sind und s ein Skalar.

Die Linearität von Spannungs- und Stromquellen ist unmittelbar intuitiv aus den Kirchhoffschen Gesetzen abzuleiten. Aber wie ist das bei den Widerständen?



← Das ist die Kennlinie eines idealen Widerstandes: Linear bis zur Zerstörungsgrenze. Die Kennlinie ist eine homogene Gerade.

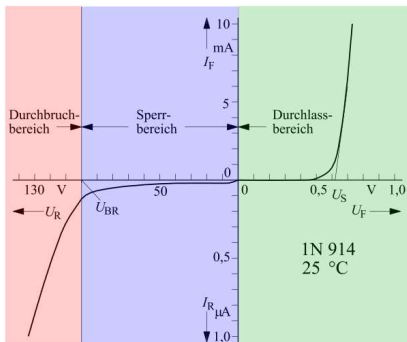
Ihre Steigung ist der Kehrwert des Widerstandes, der Leitwert oder Konduktanz G mit der Einheit Siemens [S] in Europa und mho [Ω] im angloamerikanischen Raum. Der Leitwert eines Bauelementes darf nicht mit der spezifischen Leitfähigkeit eines Materials verwechselt werden!



Bei einer Glühlampe sieht das schon anders aus: Die Kennlinie ist nichtlinear, aber symmetrisch und zeitunabhängig →

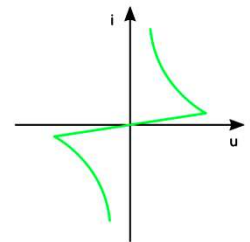
**Definition:** Ein Widerstand wird genau dann „ohmscher Widerstand“ genannt, wenn sein Widerstandswert (bis zur Zerstörungsgrenze) von der anliegenden Spannung unabhängig ist. In der Folge kann von einem Kennlinienwert sofort auf einen anderen geschlossen werden.

**Aufpassen bei der Umkehrung:** Wenn ein Widerstand kein „ohmscher Widerstand“ ist, bedeutet das, dass dessen Kennlinie keine homogene Gerade ist und daher kein Rückschluss von einem Kennlinienwert auf einen anderen möglich ist. An jeder Stelle der Kennlinie gilt aber nach wie vor das Ohmsche Gesetz!



← Bei einer Diode fällt auch die Symmetrie weg, aber ihre Kennlinie ist unabhängig von Zeit und Vorgeschichte.

Die Kennlinie einer Gasentladungsröhre → zeigt Abhängigkeit von der Vorgeschichte: Ausgehend von Spannung Null ergibt sich mit steigender Spannung zuerst ein schwacher Strom, bis bei der Zündspannung plötzlich Stoßionisation einsetzt und die Spannung mit steigendem Strom zurückgeht: In diesen



Bereichen wird der (differentielle) Widerstand negativ! Diese Kennlinie ist aber nicht einmal mehr eine Funktion, da in zwei Bereichen eine Spannung drei verschiedene Stromstärken ergeben kann, je nach Vorgeschichte.

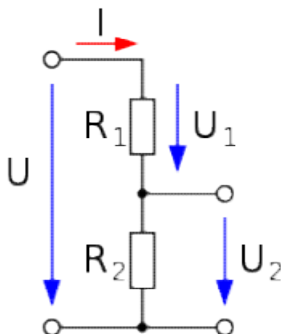
Beim Kondensator macht die Angabe einer U – I – Kennlinie überhaupt keinen Sinn mehr, da der Strom ausschließlich eine Funktion der zeitlichen Änderung der Spannung ist:

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

Konsequenz: Sämtliche im Folgenden getätigten Aussagen über das Verhalten elektrischer Netze stimmen nur, wenn die darin vorkommenden Widerstände ideal linear, also ohmsche Widerstände sind!

## Der Spannungsteiler

Der Spannungsteiler ist eine Reihenschaltung aus Widerständen, durch die eine elektrische Spannung aufgeteilt wird. Der einfachste Spannungsteiler (unbelasteter Spannungsteiler) besteht lediglich aus zwei Widerständen.



Gemäß dem Ohmschen Gesetz ergibt sich:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

Einsetzen

$$U_1 = \frac{U \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Diese als „Spannungsteilerregel“ bekannte Formel hat große Bedeutung und wird so oft verwendet, dass sie der Profi „um drei Uhr früh mit vier Promille“ auswendig beherrscht. Man beachte, dass der Strom nicht mehr explizit berechnet werden muss.

Eine andere, sehr instruktive und leichter zu merkende Formulierung dieser Regel lautet

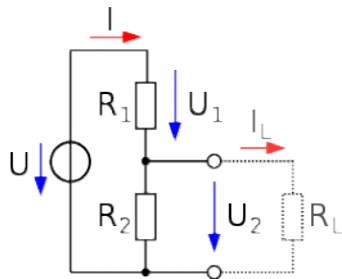
**Teilspannungen verhalten sich wie die entsprechenden Teilwiderstände.  
(Diese Regel zu kennen erleichtert Euch das Leben in der Elektrotechnik.)**

Mathematisch formuliert

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

Vorteilhaft ist dazu, dass sich diese Regel ohne Nachdenken auf Spannungsteiler mit mehr als zwei Widerständen ergänzen lässt.

Im genannten einfachsten Fall werden die abgegriffenen Teilspannungen nicht belastet. Häufig ist dies nicht der Fall, man muss auch die Belastung in die Berechnung einbeziehen. Dann spricht man vom belasteten Spannungsteiler.



Zur Berechnung kann man natürlich die Kirchhoffschen Gesetze heranziehen, dies wird in der Praxis wegen der schwer zu merkenden Formeln kaum praktiziert. Einfacher ist es, zuerst den resultierenden Teilwiderstand zu berechnen

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L}$$

Und erst danach wie einen unbelasteten Spannungsteiler zu rechnen:

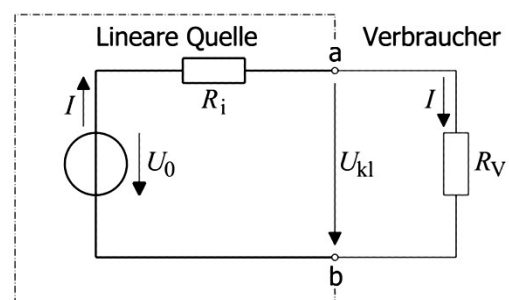
$$U_2 = \frac{U \cdot R_p}{R_1 + R_p}$$

**Ein wichtiger Merksatz für die Praxis: Ein außerhalb eines Gerätes angeschlossener Widerstand hat die gleiche elektrische Wirkung wie ein innerhalb des Gerätes an dieselben Anschlüsse angeschlossener Widerstand gleichen Wertes. (Diese Aussage klingt so logisch, dass sie fast dumm erscheint. In der Praxis stolpern aber allzu viele StudentInnen über die Nichtbeachtung.)**

## Reale Quellen und Quellen – Transformation

Wir wissen bereits, dass ideale Spannungs- und Stromquellen technisch nicht realisierbar sind.

Reale Spannungsquellen bestehen aus einer idealen Spannungsquelle  $U_0$  und einem dazu in Serie geschalteten Widerstand, nennen wir ihn einmal Innenwiderstand  $R_i$ . Diese Darstellung nennt man Thévenin-Äquivalent.  $R_i$  kann entweder tatsächlich vorhanden und getrennt beobachtet werden



(beispielsweise Leitungswiderstände), in den meisten Fällen handelt es sich aber um mehrere der Quelle innenwohnende Gegebenheiten (beispielsweise der Innenwiderstand einer Batterie), die nicht isoliert betrachtet werden können. Messbar ist lediglich die Klemmenspannung  $U_{kl}$  zwischen den Anschlüssen a und b. Sie ist vom Wert des Verbraucherwiderstandes  $R_v$  abhängig. (Spannungsteilerregel anwenden!)

**Das weiß man, ist ja auch logisch: Der Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle ist Null.**

**In der Praxis ist  $R_i$  sehr häufig weder linear noch zeitunabhängig. Diesen Umstand wollen wir in Repetitorium und Übung beiseite lassen: Wir betrachten  $R_i$  als linear, behalten aber im Hinterkopf, dass dies lediglich eine für die Grundausbildung hilfreiche Vereinfachung ist.**

Nur für den Fall, dass  $R_v = \infty$  ist ( $I=0$ ), liegt an den Klemmen die Quellenspannung an:

$$U_{kl} = U_0$$

Beachte, dass in diesem Fall keine Spannung an  $R_i$  abfällt! (Warum?)

### Spannungsquellen – Stromquellen – Transformation

Für den Fall, dass  $R_v = 0$  ist, fließt über den äußeren Stromkreis der Kurzschlussstrom

$$I = \frac{U_0}{R_i}$$

Die komplette Quellenspannung fällt an  $R_i$  ab,  $U_{kl}$  ist 0.

Sollte  $R_v \neq 0$  sein, wird obige Formel ein wenig komplizierter, am Sachverhalt ändert sich nichts:

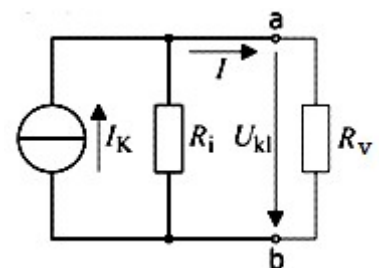
$$I = \frac{U_0}{R_i + R_v}$$

Mit der Klemmenspannung

$$U_{kl} = U_0 \cdot \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

Zu beachten ist, dass es sich bei dieser Spannungsquellen – Stromquellen – Transformation in erster Linie um eine theoretische Betrachtung handelt! Sie bedeutet keinesfalls, dass diese Betriebsart technisch Sinn macht: Man versuche beispielsweise nicht, das Lichtstromnetz kurzzuschließen, um eine leistungsfähige Stromquelle zu gewinnen!

Reale Stromquellen bestehen aus einer idealen Stromquelle  $I_K$  und einem dazu parallel geschalteten Widerstand, wir nennen ihn einmal Innenwiderstand  $R_i$ . Diese Darstellung nennt man Norton-Äquivalent.  $R_i$  ist in seltenen Fällen tatsächlich vorhanden und kann getrennt beobachtet werden (beispielsweise Isolationswiderstände), in den meisten Fällen handelt es sich aber um mehrere der Quelle innenwohnende Gegebenheiten (beispielsweise die Regelgenauigkeit elektronischer Quellen), die nicht isoliert betrachtet werden können. Messbar sind der Ausgangsstrom  $I$  und die Klemmenspannung  $U_{kl}$  zwischen den Anschlüssen a und b.



Das weiß man, ist ja auch logisch: Der Innenwiderstand einer idealen Stromquelle ist unendlich.

In der Praxis ist  $R_i$  sehr häufig weder linear noch zeitunabhängig. Diesen Umstand wollen wir in Repetitorium und Übung beiseite lassen: Wir betrachten  $R_i$  als linear, behalten aber im Hinterkopf, dass dies lediglich eine für die Grundausbildung hilfreiche Vereinfachung ist.

### Stromquellen – Spannungsquellen – Transformation

Nur für den Fall, dass  $R_v = 0$  ist ( $U_{kl} = 0$ ), liegt an den Klemmen der Nennstrom an:

$$I_K = I$$

Beachte, dass in diesem Fall kein Strom über  $R_i$  fließt! (Warum?)

Für den Fall, dass  $R_v = \infty$  ist, stellt sich an den Klemmen die Ausgangsspannung

$$U_{kl} = I_K \cdot R_i$$

ein. Sollte  $R_v$  einen Wert zwischen Null und Unendlich annehmen, wird obige Formel ein wenig komplizierter, am Sachverhalt ändert sich nichts:

$$U_{kl} = I_K \cdot (R_i \parallel R_v) = I_K \cdot \frac{R_i \cdot R_v}{R_i + R_v}$$

Mit dem Laststrom

$$I = \frac{I_K \cdot \frac{R_i \cdot R_v}{R_i + R_v}}{R_v} = I_K \cdot \frac{R_i}{R_i + R_v}$$

In der Praxis begnügt man sich mit der Näherung  $R_v \ll R_i$ . In diesem Fall wird

$$U_{kl} = I_K \cdot R_v$$

und  $R_i$  ist praktisch bedeutungslos. Dieses System wird beispielsweise in der analogen Datenübertragung sehr häufig verwendet. Interessierte schauen unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Stromschnittstelle> nach.

Im Gegensatz zur Spannungs – Stromquellen – Transformation ist das Gefährdungspotential selten und gering.

Zangenstromwandler müssen speziell bei hohen Strömen oder Stromspitzen im Kurzschluss betrieben werden, um gefährliche Überspannungen zu verhindern.

**Zur Klarstellung: Jede reale Spannungsquelle lässt sich bei jedem Belastungsfall als reale Stromquelle darstellen und umgekehrt. Der Innenwiderstand ist bei beiden Modellen gleich.**

Diese nicht unbedingt intuitive Aussage wollen wir rechnerisch überprüfen:

Gegeben sei eine ideale Stromquelle mit dem Ausgangsstrom  $I_k$ . Real wird sie durch einen Innenwiderstand  $R_i$ . Belastet wird sie durch einen Verbraucherwiderstand  $R_v$ . Berechne das Thévenin-Äquivalent:

Im Leerlauf ( $R_v = \infty$ ) beträgt die Thévenin-Spannung

$$U_{kl} = I_K \cdot R_i = U_0$$

Der Thévenin-Widerstand (Innenwiderstand der Spannungsquelle) ist damit so zu wählen, dass er unter gleicher Last  $R_v$  die gleiche Klemmenspannung ergibt:

Klemmenspannung der Stromquelle unter Last:

$$U_{kl} = I_K \cdot (R_i \parallel R_v) = I_K \cdot \frac{R_i \cdot R_v}{R_i + R_v}$$

Klemmenspannung der Spannungsquelle unter Last:

$$U_{kl} = U_0 \cdot \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

Einsetzen der Thévenin-Spannung

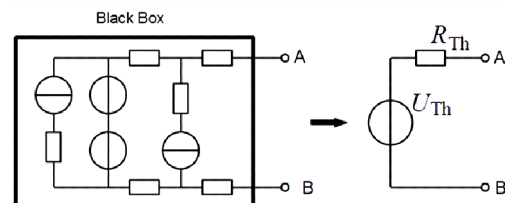
$$U_{kl} = I_K \cdot R_i \cdot \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

Was zu beweisen war: Unter allen Lastbedingungen sind die Beschreibung mittels Thévenin-Äquivalent und mittels Norton-Äquivalent gleichwertig. Die Innenwiderstände sind in beiden Modellen gleich!

Ob man eine reale Quelle in der Schaltungsanalyse als Spannungsquelle oder als Stromquelle darstellt, hängt davon ab, welchem Typ die Quelle in der Praxis näher kommt. Dabei weist ein hoher Innenwiderstand auf eine Stromquelle hin und ein niedriger Innenwiderstand auf eine Spannungsquelle. „Hoch“ und „niedrig“ sind natürlich keine wissenschaftlichen Kategorien. In der Praxis haben selbst wenig belastbare moderne Spannungsquellen aber Innenwiderstände im Ohm – Bereich oder weit darunter, während selbst einfache Stromquellen Innenwiderstände im Bereich von Hunderten Kiloohm aufweisen. Damit ist die Entscheidung üblicherweise einfach.

Mit diesen Modellen lassen sich elektrische Netze beschreiben, die aus einer Spannungsquelle oder einer Stromquelle und bis zu zwei Widerständen bestehen. Um kompliziertere Aufbauten analysieren und durch einfachere, aber elektrisch gleichwertige Aufbauten ersetzen zu können, benötigt man mindestens zwei weitere (glücklicherweise eng verwandte) Verfahren:

Das Thévenin – Theorem (nach Léon Charles Thévenin; auch: Helmholtz-Thévenin-Theorem oder Helmholtz-Satz) besagt, dass jede mögliche Kombination von linearen Spannungsquellen, Stromquellen und Widerständen bezüglich zweier Klemmen elektrisch äquivalent zu einer Reihenschaltung aus einer Spannungsquelle und einem ohmschen Widerstand ist. Äquivalenz bedeutet, dass sich bei gleicher äußerer Belastung gleiches Verhalten von Spannung und Stromstärke einstellt.



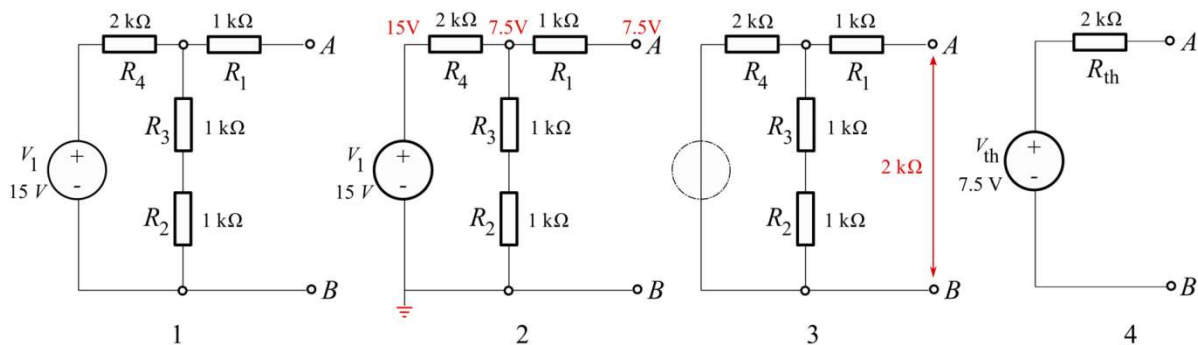
Äquivalenz bedeutet, dass sich bei gleicher äußerer Belastung gleiches Verhalten von Spannung und Stromstärke einstellt.

Um den Thévenin-Äquivalentwiderstand  $R_i$  zu berechnen, geht man wie folgt vor:

- Zuerst wird das Schaltbild gezeichnet. Dabei ist darauf zu achten, dass sämtliche Quellen als ideal betrachtet und etwaige Innenwiderstände explizit herausgezeichnet werden.

- Dann werden im Schaltbild alle Spannungsquellen durch Kurzschlüsse und alle Stromquellen durch Unterbrechungen ersetzt.
- Man erhält ein mehr oder weniger kompliziertes Netzwerk, das ausschließlich ohmsche Widerstände enthält. Dieses kann durch Lösen des innewohnenden linearen Gleichungssystems immer und eindeutig gelöst werden. Das Ergebnis ist der Thévenin-Äquivalentwiderstand  $R_i$ .

Die Berechnung der Quellenspannung gelingt mit diesem Modell meist nicht auf unmittelbar einsichtigem Weg:



Nach der Berechnung von  $R_i$  muss man selbst in diesem einfachen Beispiel überlegen, welche Widerstände stromdurchflossen sind ( $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ). Diese bilden einen 1:1 Spannungsteiler, sodass  $U_0 = 7,5V$  ist.  $R_1$  ist für die Berechnung von  $U_0$  ohne Bedeutung.

**Das Thévenin – Theorem wird in der Praxis lediglich zur Berechnung des Thévenin-Äquivalentwiderstandes benutzt, die Quellenspannung muss gemessen werden.**

Oft tut man sich den Aufwand für die Berechnung des Thévenin-Äquivalentwiderstandes  $R_i$  nicht an, sonst bestimmt auch ihn experimentell. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Welche man wählt, hängt primär von der tatsächlichen Belastbarkeit der Schaltung ab:

Die Ausgangsspannung bei offenen Klemmen A-B ist die Leerlaufspannung und zugleich die Thévenin – Äquivalent – Quellenspannung  $U_0$ .

Ist ein Kurzschluss über die Klemmen zulässig, wird der Kurzschlussstrom  $I_K$  gemessen. Dann wird das Ohmsche Gesetz angewandt:

$$R_i = \frac{U_0}{I_K}$$

Ist kein Kurzschluss zulässig, wird ein bekannter Widerstand  $R_v$  angeschlossen und dann die Klemmenspannung  $U_{kl}$  gemessen. Danach kann der Thévenin-Äquivalentwiderstand  $R_i$  mit Hilfe der Spannungsteilerregel berechnet werden.

$$U_{kl} = \frac{U_0 \cdot R_v}{R_i + R_v}$$

$$R_i + R_v = \frac{U_0 \cdot R_v}{U_{kl}}$$

$$R_i = \frac{U_0 \cdot R_v}{U_{kl}} - R_v = \frac{U_0}{U_{kl}} R_v - R_v = R_v \left( \frac{U_0}{U_{kl}} - 1 \right)$$



Eine geläufige Variante dieser Methode ist die der Halb-Spannung (ebenso falls technisch zulässig): Der Widerstand an A–B ist so veränderlich, dass die Hälfte der Leerlaufspannung über A–B abfällt. Der veränderliche Widerstand ist dann gleich dem Thévenin-Äquivalentwiderstand.

Man erkennt, dass diese Methode nicht wirklich befriedigt. Für alle linearen Netzwerke universell gültig ist hingegen das Superpositionsprinzip, welches ebenso vom großen deutschen Physiker Hermann von Helmholtz stammt:

Um die Eigenschaften eines linearen Netzwerkes zu berechnen, geht man wie folgt vor:

- Zuerst wird das Schaltbild gezeichnet. Dabei ist darauf zu achten, dass sämtliche Quellen als ideal betrachtet und etwaige Innenwiderstände explizit herausgezeichnet werden.
- Dann werden im Schaltbild in Schritt 1 alle Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt, die Stromquellen verbleiben original.
- Man erhält ein mehr oder weniger kompliziertes Netzwerk, das ausschließlich Stromquellen und ohmsche Widerstände enthält. Dieses kann durch Lösen des innewohnenden linearen Gleichungssystems immer und eindeutig gelöst werden. Das Ergebnis ist die Klemmenspannung  $U_1$ .
- Dann werden im Schaltbild in Schritt 2 alle Stromquellen ersatzlos entfernt (= durch eine offene Leitung ersetzt), die Spannungsquellen verbleiben original.
- Man erhält ein mehr oder weniger kompliziertes Netzwerk, das ausschließlich Spannungsquellen und ohmsche Widerstände enthält. Dieses kann durch Lösen des innewohnenden linearen Gleichungssystems immer und eindeutig gelöst werden. Das Ergebnis ist die Klemmenspannung  $U_2$ .
- $U_1$  und  $U_2$  werden addiert, das Ergebnis ist die resultierende Klemmenspannung  $U$ .

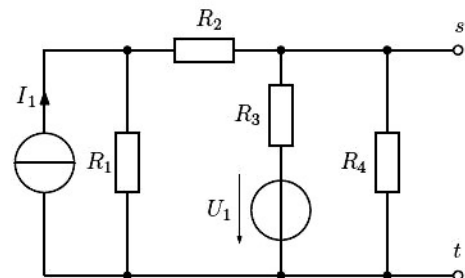
Hinweis: Natürlich sind die beiden Rechenschritte 1 und 2 beliebig vertauschbar!

**Dieses Verfahren funktioniert übrigens auch in der technischen Realität. Unbedingt zu vermeiden ist allerdings der häufige Fehler, die Spannungsquellen kurzzuschließen statt durch Kurzschlüsse zu ersetzen!**

Beispiel:

$$\begin{array}{llll} R_1 = 3\,\Omega & R_2 = 2\,\Omega & R_3 = 2\,\Omega & R_4 = 5\,\Omega \\ I_1 = 3,75\,\text{A} & U_1 = 18\,\text{V} & & \end{array}$$

Gegeben ist folgendes Netzwerk:



a) Berechne die Spannung zwischen den Anschlüssen s und t.

Da alle Schaltelemente linear sind, erfolgt die Berechnung mittels des Superpositionsprinzips.



I) Die Stromquelle durch eine Unterbrechung ersetzen. Die Ausgangsspannung  $U_{a1}$  ergibt sich zu

$$U_{a1} = \frac{U_1 \cdot ((R_1 + R_2) \parallel R_4)}{((R_1 + R_2) \parallel R_4) + R_3} = \frac{18 \cdot ((3 + 2) \parallel 5)}{((3 + 2) \parallel 5) + 2} = \frac{18 \cdot (5 \parallel 5)}{(5 \parallel 5) + 2} = \frac{18 \cdot 2.5}{4.5} = 10V$$

II) Die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzen. Die Spannung an der Stromquelle ergibt sich zu

$$U_q = I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_2 + (R_3 \parallel R_4))) = 3.75 \cdot (3 \parallel (2 + (2 \parallel 5))) = 6V$$

Die Ausgangsspannung  $U_{a2}$  ergibt sich dementsprechend zu

$$\begin{aligned} U_{a2} &= U_q \cdot \frac{R_3 \parallel R_4}{R_2 + (R_3 \parallel R_4)} = \\ &= \frac{I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_2 + (R_3 \parallel R_4))) \cdot (R_3 \parallel R_4)}{R_2 + (R_3 \parallel R_4)} = \\ &= \frac{3.75 \cdot (3 \parallel (2 + (2 \parallel 5))) \cdot (2 \parallel 5)}{2 + (2 \parallel 5)} = \\ &= \frac{3.75 \cdot (3 \parallel (2 + (1.429))) \cdot (1.429)}{2 + 1.429} = \\ &= \frac{3.75 \cdot (3 \parallel 3.429) \cdot 1.429}{3.429} = \\ &= \frac{3.75 \cdot 1.6 \cdot 1.429}{3.429} = 2.5V \end{aligned}$$

III) Die gesamte Spannung zwischen den Anschlüssen s und t ist die Summe der Spannungen  $U_{a1}$  und  $U_{a2} = 12.5V$ .

b) Berechne den Innenwiderstand (Thévenin-Äquivalentwiderstand) der realen Spannungsquelle s-t.

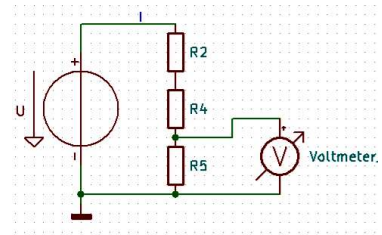
Der Innenwiderstand der realen Spannungsquelle s-t ist zu berechnen, indem die Stromquelle durch eine Unterbrechung und die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt wird.

$$R_i = (R_1 + R_2) \parallel R_3 \parallel R_4 = (3 + 2) \parallel 2 \parallel 5 = 5 \parallel 2 \parallel 5 = 1.11\Omega$$

**Es ist nur natürlich, an dieser Stelle gründlich zu überlegen, doch besser Gartenbau oder Kunstgeschichte zu studieren. Bitte lasst Euch nicht abschrecken! Im Endeffekt war es nichts anderes als Kirchhoff und Ohm, nur halt durch die Vielzahl der Schaltungselemente unübersichtlich. Da hilft nur Übung!**

## Die praktische Messung von Spannung, Strom und Widerstand

Wir erinnern uns: Spannung ist die Potentialdifferenz in einem elektrischen Feld. In einem elektrostatischen Feld ist die Spannung zeitlich konstant. In einem Feld mit lediglich einer Kraftquelle (Zentralkraftfeld) ist das Potential eine Funktion des Abstandes von der Kraftquelle und die Spannung die Differenz zweier Funktionen der Abstände. In das (bis auf das Problem der Polarität) gleichartige Gravitationsfeld übertragen entspräche die Spannungsmessung der Messung der Höhendifferenz zwischen zwei Punkten, sagen wir beispielsweise zwei Stockwerken. Um diese Messung durchzuführen, messen wir von außen die Höhendifferenz.



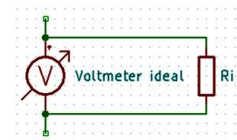
**Merksatz: Die Spannungsmessung erfolgt parallel.**

Das Symbol für ein Spannungsmessgerät (Voltmeter) ist wie so oft nicht eindeutig, aber so ähnlich wie in diesem Schaltbeispiel. Man findet auch den Pfeil nur im Kreis oder auch durchgezeichnet und das „V“ daneben. Hier wird die Spannung an R5 gemessen.

Ein paar Hinweise zur Praxis: In der überragenden Zahl der Fälle wird die Spannungsmessung tatsächlich so ausgeführt. In der elektrischen Installationstechnik wird die Spannungsabschätzung (Messung ist das keine) auf eine Messung des Feldes zurückgeführt, da dazu keine Kontaktierung erforderlich ist. Vor allem wird diese Methode zum Lokalisieren spannungsführender Leitungen in Mauern verwendet. Die Messung von Hochspannung mittels Feldmessung wird im Schulunterricht noch hier und da demonstriert, praktische Bedeutung hat sie nicht.

**Das ideale Spannungsmessgerät (Voltmeter) belastet die Schaltung nicht. Sein Innenwiderstand ist unendlich.**

**Ein reales Spannungsmessgerät (Voltmeter) besteht aus einem idealen mit einem parallel dazu geschalteten Innenwiderstand. Es ist wie ein Schabernack der Physik, dass eine reale Spannungsquelle den Innenwiderstand in Serie hat und ein reales Spannungsmessgerät den Innenwiderstand parallel.**



Die tatsächliche Höhe des Eingangswiderstandes eines Voltmeters ist eine Frage von Anwendung, Technologie und natürlich Preis. Analoge Voltmeter haben meist einen vom Messbereich abhängigen Eingangswiderstand von etwa  $100\text{k}\Omega/\text{V}$ . Billige Digitalvoltmeter haben fix  $1\text{M}\Omega$ , alle besseren Geräte fix  $10\text{M}\Omega$ . Bei Geräten, die auch für Arbeiten im Installationsbereich vorgesehen sind, gibt es oft eine Funktion, mit der der Eingangswiderstand in den Bereich von ungefähr  $100\text{k}\Omega$  abgesenkt werden kann, um Fehlmessungen durch Einstreuungen zu vermeiden. Vor allem bei den hochpreisigen Tischgeräten gibt es eine Funktion, durch die der Eingangswiderstand für Spannungen im Bereich  $\pm 10\text{V}$  bis weit über  $1\text{G}\Omega$ , manchmal sogar  $1\text{T}\Omega$  erhöht werden kann. Sogenannte Femto – Amperemeter schaffen Eingangswiderstände bis zu  $10^{17}\Omega$ . Alternativ gibt es einige wenige statische und quasi – statische Voltmeter, die die Spannungsmessung auf eine Messung der elektrostatischen Kraftwirkung zurückführen oder lediglich die Änderung der Spannung registrieren. Beide Systeme sind praktisch ausschließlich für Hochspannung verwendbar und extrem selten.

Strom ist der Fluss einer Anzahl von Ladungsträgern pro Zeiteinheit durch eine Leitung. Um die Messung durchzuführen, müssen wir das Messgerät in die Leitung einschleifen.

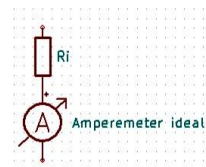
**Merksatz: Die Strommessung erfolgt in Serie. Dazu ist die jeweilige Leitung aufzutrennen und das Strommessgerät einzuschleifen. Nach erfolgter Messung das Messgerät entfernen und die Leitung**

wieder verbinden. (Das wird häufig vergessen und ich kann dann wieder die Fahrkarten nach Stockholm zahlen, weil jemand die Energieerhaltung widerlegt hat.)

Ein paar Hinweise zur Praxis: In den meisten Fällen wird die Strommessung tatsächlich so ausgeführt. Vor allem bei höheren Strömen, beispielsweise bei Motorsteuerungen, Heizungen oder überhaupt in der Energietechnik misst man auch indirekt mittels der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes. Diese Methode ist mit Fehlern in der Gegend von etwa 1% nicht ganz so genau wie die direkte Messung (0.1% sind recht leicht erreichbar, Präzisionssysteme sind noch deutlich besser), aber wesentlich einfacher in der Handhabung. Vorteilhaft ist vor allem, dass zwischen Messgerät und Messkreis kein elektrischer Kontakt besteht, was die Einhaltung der Sicherheitsregeln extrem vereinfacht. Nachteilig kann sein, dass diese Methode eine untere Messgrenze von einige mA hat.

**Das ideale Strommessgerät (Amperemeter) belastet die Schaltung nicht. Sein Innenwiderstand ist Null.**

**Ein reales Strommessgerät (Amperemeter) besteht aus einem idealen mit einem dazu in Serie geschalteten Innenwiderstand. Es ist wie ein Schabernack der Physik, dass eine reale Stromquelle den Innenwiderstand parallel hat und ein reales Strommessgerät den Innenwiderstand in Serie.**



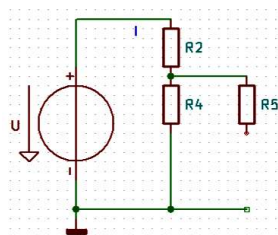
Die tatsächliche Höhe des Serienwiderstandes eines Amperemeters liegt bei den meisten Geräten so, dass sich bei Messbereichsendwert ein Spannungsabfall von einigen 100mV ergibt. Das bedeutet beispielsweise im 2A Bereich etwa  $0,1\Omega$  und etwa  $100\Omega$  im 2mA Bereich. Dazu kommen noch ein paar Zehntelohm für die Schutzschaltungen. Teure Tischgeräte haben in den Strombereichen oft einen fixen Eingangswiderstand, die Umschaltung der Messbereiche erfolgt durch elektronische Verstärker. Für die Messung kleiner und kleinster Ströme unter etwa 10mA verwendet man manchmal Transimpedanzverstärker (lernen wir später). Sie sorgen dafür, dass der wirksame Innenwiderstand Null ist. Nachteilig ist ihre Anfälligkeit gegenüber Quellen, die keine idealen Stromquellen sind.

Hier ein Beispiel, mit dem ich die ChemikerInnen gerne quäle, vor allem wenn sie die Kirchhoffschen Gesetze für so einfach halten:

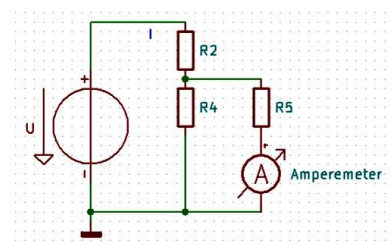
Aufgabe: Der Strom durch R5 ist zu messen.

Korrekte Durchführung:

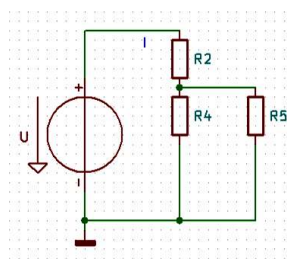
1) Untere Leitung von R5 auftrennen



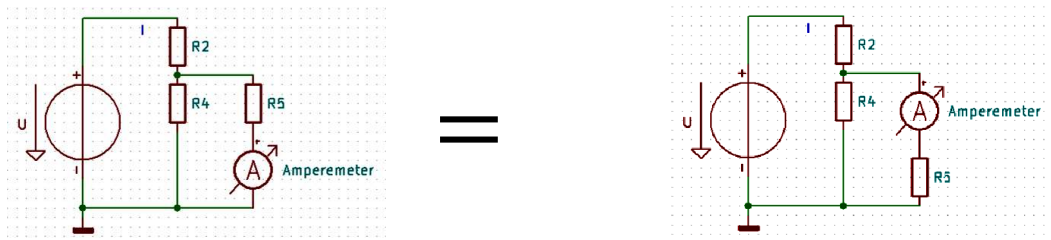
2) Messgerät einschleifen



3) Messen, danach Messgerät entfernen und Originalzustand wieder herstellen.



**Hinweis: Ein Strom, der in einen Widerstand hinein fließt, fließt genauso auch wieder heraus. Daher sind die Strommessungen vor und nach dem Widerstand äquivalent:**

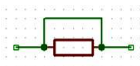
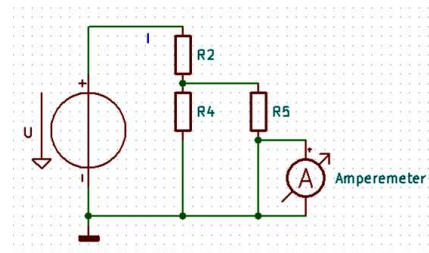


Das ist manchmal sehr praktisch, beispielweise wenn der andere Anschluss nicht gut zugänglich ist.

**Achtung! Immer wieder sehe ich folgende Schaltung zur Strommessung:**

**Bitte unterlasst diesen Quatsch!**

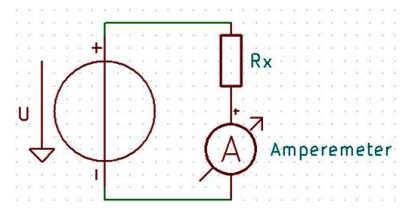
Ich erinnere an dieser Stelle gerne an das beliebte Motiv auf T - Shirts:



Widerstand ist zwecklos

Der elektrische Widerstand ist ein Bauelement, das einen Spannungsabfall produziert, wenn er von elektrischem Strom durchflossen wird. Anders formuliert ist er der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom (Ohmsches Gesetz). Die Messung des elektrischen Widerstandes erfordert immer das Einbringen elektrischer Energie und der Messung der durch den Widerstand ausgeübten Wirkungen auf diese elektrische Energie. In der Elektronik verwendet man üblicherweise Gleichspannung. Das kann im Detail auf verschiedene Weise geschehen.

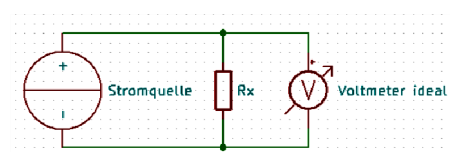
Als ich jung war, wurde bei elektrischen Widerstandsmessgeräten der unbekannte Widerstand in Serie mit einer Spannungsquelle mit bekannter Spannung geschaltet und der Strom gemessen →



Vorteilhaft war der extrem einfache Aufbau, nachteilig die hyperbolische Skalenteilung. (Warum?) Vor allem hohe Widerstandswerte waren dadurch nur grob abschätzbar.

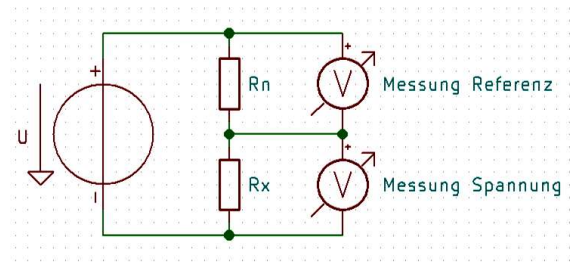
Hochpreisige Präzisionsgeräte nehmen das Ohmsche Gesetz „wörtlich“ →

Vorteilhaft sind der einfache Aufbau und die hohe Genauigkeit. Nachteilig ist der hohe Preis für die Präzisionsstromquelle.



Bei den billigen Handmultimetern nützt man den Effekt aus, dass sie intern immer den Quotienten zwischen einer Referenzspannung und der zu messenden Spannung bilden:

$$\text{Anzeige} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Referenz}}$$



Nun legt man eine unbekannte (und das ist der große Vorteil dieser Schaltung!) Spannung an die Serienschaltung eines bekannten Widerstandes  $R_n$  und eines unbekannten Widerstandes  $R_x$  an und misst gleichzeitig die beiden Spannungsabfälle. Es ergeben sich gemäß Spannungsteilerregel

$$\text{Spannung} = U \cdot \frac{R_x}{R_n + R_x}$$

$$\text{Referenz} = U \cdot \frac{R_n}{R_n + R_x}$$

Einsetzen

$$\text{Anzeige} = \frac{U \cdot \frac{R_x}{R_n + R_x}}{U \cdot \frac{R_n}{R_n + R_x}} = \frac{R_x}{R_n}$$

Und wenn man vernünftigerweise  $R_n$  mit ganzen Zehnerpotenzen wählt, braucht man nur mehr den korrekten Dezimalpunkt generieren.

Nebenbei: In der Materialanalyse verwendet man zur Widerstandsmessung Wechselfelder. Diese werden je nach dem elektrischen Widerstand des zu messenden Materials mehr oder weniger stark verändert. So lassen sich wesentliche Materialeigenschaften und Materialzustände (beispielsweise Risse) schnell, berührungslos und zerstörungsfrei charakterisieren.

**Wesentlich für die Praxis: Jede Widerstandsmessung mit Widerstandsmessgeräten (Ohmmetern) beruht darauf, dass das Messgerät den Widerstand unter Spannung setzt und dann misst. Daher muss vor der Messung sichergestellt werden, dass der zu messende Widerstand nicht aus anderen Quellen mit Spannung beaufschlagt wird! Selbst Profis messen bei eingebauten Widerständen zuerst nach, ob diese wirklich spannungslos sind!**

Alle diese Messmethoden sind für Messgeräte ausgelegt, die den Widerstandswert bei niedrigen Spannungen (üblicherweise unter 200mV) genau messen sollen. Will man den Widerstandswert von nicht – ohmschen Widerständen bestimmen, will man auch die Spannung vorgeben, bei der die Messung stattfinden soll. Dann benötigt man außer der Spannungsquelle ein Voltmeter und ein Milliampereometer und bekommt es mit deren parasitären Innenwiderständen zu tun.

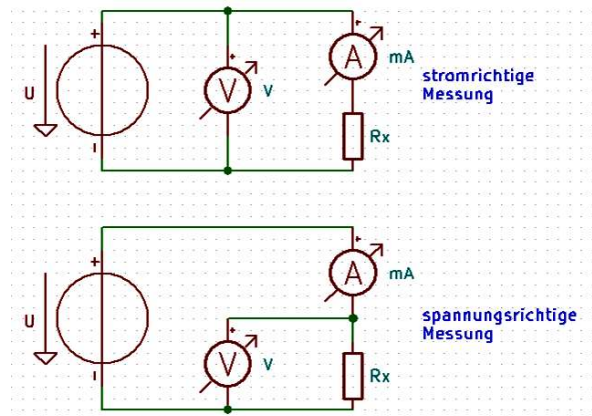
## Das nun folgende Thema „spannungsrichtige und stromrichtige Widerstandsmessung“ ist Prüfungsstoff!

Um mit einem Voltmeter und einem Milliampereometer einen Widerstand zu messen, kann man zwischen zwei verschiedenen Aufbauten wählen →

Wären Voltmeter und mA – Meter ideal, wären beide Schaltungen äquivalent. Doch leider haben reale Messgeräte ihre parasitären Innenwiderstände.

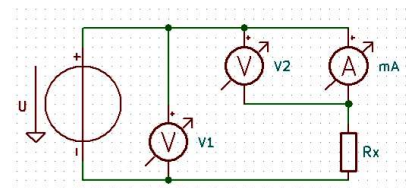
Aufgrund dieser misst die obere Schaltung zwar den Strom durch  $R_x$  korrekt, aber die Spannungsmessung ist falsch, da der Strom zusammen mit dem Innenwiderstand des mA – Meters einen Spannungsabfall ergibt: Das Voltmeter zeigt mehr Spannung an als tatsächlich an  $R_x$  anliegt.

Die untere Schaltung hingegen misst die Spannung an  $R_x$  korrekt, nur leider fließt ein zusätzlicher Strom durch den parasitären Innenwiderstand des Voltmeters: Das mA – Meter zeigt einen höheren Strom als tatsächlich durch  $R_x$  fließt.



### Das versteht und könnt Ihr „um drei Uhr früh mit vier Promille“!

Wenn es in der Praxis wirklich genau gehen soll, misst man die Quellspannung  $U$  und den Spannungsabfall am Strommessgerät. Da der Innenwiderstand des Strommessgerätes immer um viele Größenordnungen geringer ist als der des Voltmeters, macht man dabei keinen nennenswerten Fehler. Nun den Spannungsabfall am Strommessgerät  $V_2$  von der Quellenspannung  $V_1$  abziehen und schon hat man eine genaue Messung. Der Aufwand ist halt größer, da man entweder zwei Voltmeter oder ein Voltmeter und eine digital steuerbare Spannungsquelle benötigt. Sollte die Spannungsquelle wirklich stabil sein, kann man auch die Messungen  $V_1$  und  $V_2$  hintereinander mit demselben Gerät ausführen.





# Übungen

**Kleiner Tipp zu den Übungen: Die Schaltungen mit der Hand zeichnen. Das müsst Ihr bei den Besprechungen auch.**

Was ist eine Kennlinie? Worauf ist bei der Analyse einer publizierten Kennlinie als erstes zu achten?

Nenne die Linearitäts – Axiome der Linearen Algebra.

Welche technische Eigenschaft sämtlicher Bauteile ist die essentielle Voraussetzung dafür, dass die Schaltungsanalyse und gegebenenfalls Schaltungsvereinfachung mittels der Theorien der linearen Netze möglich sind? Nenne ein Bauelement Deiner Wahl, das – wenn es in der Schaltung vorkommt – die korrekte Anwendung der Theorien der linearen Netze unmöglich macht.

Definiere „ohmscher Widerstand“. Nenne ein Beispiel, welcher elektrische Widerstand kein ohmscher Widerstand ist.

Wie ist das Ohmsche Gesetz anzuwenden, wenn ein Widerstand ein „ohmscher Widerstand“ ist?

Wie ist das Ohmsche Gesetz anzuwenden, wenn ein Widerstand kein „ohmscher Widerstand“ ist?

Gegeben sei ein unbelasteter Spannungsteiler. Oben  $1\text{k}\Omega$ , unten  $3\text{k}\Omega$ . Die Eingangsspannung beträgt  $8\text{V}$ . Berechne die beiden Teilspannungen. Mit welcher Merkregel kannst Du die Berechnung besonders einfach gestalten?

Gegeben sei ein belasteter Spannungsteiler. Oben  $1\text{k}\Omega$ , unten  $2\text{k}\Omega$ . Dem unteren Widerstand ist ein  $2\text{k}\Omega$  Lastwiderstand außerhalb des Gerätes parallel geschaltet. Die Eingangsspannung beträgt  $8\text{V}$ . Berechne die Spannung am Lastwiderstand. Mit welcher Merkregel kannst Du die Berechnung besonders einfach gestalten? Welche Angabe ist irrelevant?

Nenne den Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle.

Nenne den Innenwiderstand einer idealen Stromquelle.

Der Strom an den Klemmen einer realen Spannungsquelle wird mit einem idealen Strommessgerät zu  $100\text{mA}$  bestimmt. Die Spannung an den Klemmen dieser realen Spannungsquelle wird mit einem idealen Voltmeter zu  $10\text{V}$  bestimmt. Berechne den Innenwiderstand. Welche Gesetzmäßigkeit hast Du verwendet? Berechne die thermische Leistung, die während der Strommessung in der Spannungsquelle generiert wird.

Der Strom an den Klemmen einer realen Stromquelle wird mit einem idealen Strommessgerät zu  $100\text{mA}$  bestimmt. Die Spannung an den Klemmen dieser realen Stromquelle wird mit einem idealen Voltmeter zu  $10\text{V}$  bestimmt. Berechne den Innenwiderstand. Welche Gesetzmäßigkeit hast Du verwendet? Berechne die thermische Leistung, die während der Strommessung in der Spannungsquelle generiert wird (Vorsicht Falle: Wie hoch ist die Spannung während der Strommessung?).

Du möchtest den Innenwiderstand des Lichtstromnetzes bestimmen. Die Anwendung welcher Standardmethode wäre gar keine gute Idee?



Nur für Fortgeschrittene: Du möchtest den Innenwiderstand des Lichtstromnetzes bestimmen. Wie kannst Du diese Messung gestalten, sodass die technischen Erfordernisse eingehalten werden: Nennspannung 230V, maximaler Strom 16A. Berechne auch die beiden wesentlichen Eigenschaften des Lastwiderstandes.

Benenne das wichtigste und umfassendste Modell zur Schaltungsanalyse und gegebenenfalls Schaltungsvereinfachung mittels der Theorie der linearen Netze. Wie funktioniert das in der Berechnung? Kann man das auch praktisch genau so machen?

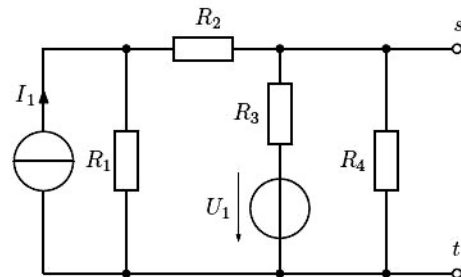
Gegeben sei diese Schaltung.

$$R_1 = 3\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_3 = 2\ \Omega \quad R_4 = 5\ \Omega$$

$$I_1 = 3,75\ \text{A} \quad U_1 = 18\ \text{V}$$

a) Berechne die Spannung zwischen den Anschlüssen s und t.

b) Berechne den Innenwiderstand (Thévenin-Äquivalentwiderstand) der realen Spannungsquelle s-t.



Wie erfolgt die korrekte Messung der elektrischen Spannung?

Wie erfolgt die korrekte Messung des elektrischen Stroms?

Was ist nach jeder Strommessung unbedingt erforderlich?

Nenne den Innenwiderstand eines idealen Spannungsmessgerätes.

Nenne den Innenwiderstand eines idealen Strommessgerätes.

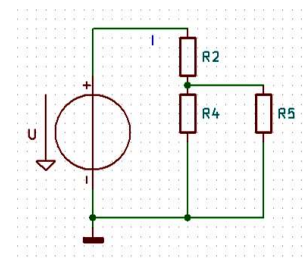
Vervollständige den Satz „Der Strom der aus einem Widerstand heraus fließt ist gleich dem ...“

Worauf musst Du bei jeder Widerstandsmessung mit einem Ohmmeter achten? Was tust Du dazu vor der eigentlichen Widerstandsmessung?

Gegeben sei diese Schaltung:

Zeichne sämtliche Messungen ein, die notwendig sind, um die Gültigkeit der beiden Kirchhoffschen und des Ohmschen Gesetzes für alle Knoten, Maschen und Widerstände zu beweisen.

Stelle dazu die für die Beweise nötigen Gleichungen auf.



Du möchtest einen elektrischen Widerstand mit wahlfreier Spannung messen.

Welche Standardmethode kannst Du dann nicht mehr verwenden?

Wie gehst Du vor? Welche beiden Methoden gibt es? Was sind ihre jeweiligen Vor- und Nachteile?

# Lösungen zu den Übungen

Was ist eine Kennlinie? Worauf ist bei der Analyse einer publizierten Kennlinie als erstes zu achten?

Eine Kennlinie ist in der Elektrotechnik die graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Stromstärke, der für ein Bauteil, eine Baugruppe oder ein Gerät kennzeichnend ist.

Bei jedem Diagramm als erstes auf die Achsenbeschriftungen schauen! Die Zuordnungen sind keinesfalls heilig und dem Zeitgeist, der jeweiligen Anwendung und den Vorstellungen der Verfasserin/ des Verfassers unterworfen.

Nenne die Linearitäts – Axiome der Linearen Algebra.

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(s \cdot \vec{x}) = s \cdot f(\vec{x})$$

Welche technische Eigenschaft sämtlicher Bauteile ist die essentielle Voraussetzung dafür, dass die Schaltungsanalyse und gegebenenfalls Schaltungsvereinfachung mittels der Theorien der linearen Netze möglich sind?

Alle Bauteile müssen linear sein.

Nenne ein Bauelement Deiner Wahl, das – wenn es in der Schaltung vorkommt – die korrekte Anwendung der Theorien der linearen Netze unmöglich macht.

Glühlampe, Diode

Definiere „ohmscher Widerstand“. Nenne ein Beispiel, welcher elektrische Widerstand kein ohmscher Widerstand ist.

Ein Widerstand wird genau dann „ohmscher Widerstand“ genannt, wenn sein Widerstandswert (bis zur Zerstörungsgrenze) von der anliegenden Spannung unabhängig ist. In der Folge kann von einem Kennlinienwert sofort auf einen anderen geschlossen werden.

Glühlampe

Wie ist das Ohmsche Gesetz anzuwenden, wenn ein Widerstand ein „ohmscher Widerstand“ ist?

Da bei einem ohmschen Widerstand der elektrische Widerstand (bis zur Zerstörungsgrenze) von der anliegenden Spannung unabhängig ist, misst man den Widerstand bei einer beliebigen, in der Praxis bei der niedrigsten praktikablen Spannung.

Wie ist das Ohmsche Gesetz anzuwenden, wenn ein Widerstand kein „ohmscher Widerstand“ ist?

Dann gilt das Ohmsche Gesetz an jeder Stelle der Kennlinie ohne Möglichkeit des Rückschlusses auf andere Stellen. Der elektrische Widerstand ist daher als Funktion der Spannung anzugeben.

Gegeben sei ein unbelasteter Spannungsteiler. Oben  $1\text{k}\Omega$ , unten  $3\text{k}\Omega$ . Die Eingangsspannung beträgt  $8\text{V}$ . Berechne die beiden Teilspannungen. Mit welcher Merkregel kannst Du die Berechnung besonders einfach gestalten?

Teilspannungen verhalten sich wie die entsprechenden Teilwiderstände.

Daher ist das Verhältnis von oberer und unterer Spannung  $1:3$ , zusammen  $4$ , also  $8\text{V}/4=2\text{V}$  und  $8\text{V}\cdot 3/4=6\text{V}$ .

Gegeben sei ein belasteter Spannungsteiler. Oben  $1\text{k}\Omega$ , unten  $2\text{k}\Omega$ . Dem unteren Widerstand ist ein  $2\text{k}\Omega$  Lastwiderstand außerhalb des Gerätes parallel geschaltet. Die Eingangsspannung beträgt  $8\text{V}$ . Berechne die Spannung am Lastwiderstand. Mit welcher Merkregel kannst Du die Berechnung besonders einfach gestalten? Welche Angabe ist irrelevant?

Teilspannungen verhalten sich wie die entsprechenden Teilwiderstände.

Die Parallelschaltung der beiden unteren Widerstände ergibt  $1\text{k}\Omega$ . Daher sind beide Teilwiderstände gleich, die Spannung wird zu gleichen Teilen geteilt, beide Teilspannungen sind  $4\text{V}$ .

Ein außerhalb eines Gerätes angeschlossener Widerstand hat die gleiche elektrische Wirkung wie ein innerhalb des Gerätes an dieselben Anschlüsse angeschlossener Widerstand gleichen Wertes. Daher ist die Angabe „außerhalb des Gerätes“ irrelevant?

Nenne den Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle.

$0$

Nenne den Innenwiderstand einer idealen Stromquelle.

$\infty$

Der Strom an den Klemmen einer realen Spannungsquelle wird mit einem idealen Strommessgerät zu  $100\text{mA}$  bestimmt. Die Spannung an den Klemmen dieser realen Spannungsquelle wird mit einem idealen Voltmeter zu  $10\text{V}$  bestimmt. Berechne den Innenwiderstand. Welche Gesetzmäßigkeit hast Du verwendet? Berechne die thermische Leistung, die während der Strommessung in der Spannungsquelle generiert wird.

$$R_i = \frac{U_0}{I} = \frac{10\text{V}}{0,1\text{A}} = 100\Omega$$

Norton-Äquivalent

$$P = U_0 \cdot I = 10\text{V} \cdot 0,1\text{A} = 1\text{W}$$

Der Strom an den Klemmen einer realen Stromquelle wird mit einem idealen Strommessgerät zu 100mA bestimmt. Die Spannung an den Klemmen dieser realen Stromquelle wird mit einem idealen Voltmeter zu 10V bestimmt. Berechne den Innenwiderstand. Welche Gesetzmäßigkeit hast Du verwendet? Berechne die thermische Leistung, die während der Strommessung in der Spannungsquelle generiert wird.

$$R_i = \frac{U_0}{I} = \frac{10V}{0,1A} = 100\Omega$$

### Thévenin-Äquivalent

Vorsicht Falle: Während der Strommessung sind die Ausgangsspannung und die Quellenspannung 0, daher ist die Leistung auch 0!

Du möchtest den Innenwiderstand des Lichtstromnetzes bestimmen. Die Anwendung welcher Standardmethode wäre gar keine gute Idee?

### Kurzschlussstrom messen.

Nur für Fortgeschrittene: Du möchtest den Innenwiderstand des Lichtstromnetzes bestimmen. Wie kannst Du diese Messung gestalten, sodass die technischen Erfordernisse eingehalten werden: Nennspannung 230V, maximaler Strom 16A. Berechne auch die beiden wesentlichen Eigenschaften des Lastwiderstandes.

- 1) Spannung  $U_0$  ohne Last messen.
- 2) Lichtnetz mit Lastwiderstand  $R_L$  belasten, Spannung unter Last  $U_L$  messen.
- 3) Innenwiderstand  $R_i$  gemäß Formel berechnen

$$R_i = R_L \left( \frac{U_0}{U_L} - 1 \right)$$

- 4) Widerstandswert von  $R_L$

$$R_L = \frac{U_0}{I_{max}} = \frac{230V}{16A} = 14,375\Omega$$

Maximal zulässige Verlustleistung von  $R_L$

$$P = U_0 \cdot I_{max} = 230V \cdot 16A = 3680W$$

Benenne das wichtigste und umfassendste Modell zur Schaltungsanalyse und gegebenenfalls Schaltungsvereinfachung mittels der Theorie der linearen Netze. Wie funktioniert das in der Berechnung? Kann man das auch praktisch genau so machen?

### Superpositionsprinzip

Um die Eigenschaften eines linearen Netzwerkes zu berechnen, geht man wie folgt vor:

- Zuerst wird das Schaltbild gezeichnet. Dabei ist darauf zu achten, dass sämtliche Quellen als ideal betrachtet und etwaige Innenwiderstände explizit herausgezeichnet werden.
- Dann werden im Schaltbild in Schritt 1 alle Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt, die Stromquellen verbleiben original.
- Man erhält ein mehr oder weniger kompliziertes Netzwerk, das ausschließlich Stromquellen und ohmsche Widerstände enthält. Dieses kann durch Lösen des innewohnenden linearen

Gleichungssysteme immer und eindeutig gelöst werden. Das Ergebnis ist die Klemmenspannung  $U_1$ .

- Dann werden im Schaltbild in Schritt 2 alle Stromquellen ersatzlos entfernt (= durch eine offene Leitung ersetzt), die Spannungsquellen verbleiben original.
- Man erhält ein mehr oder weniger kompliziertes Netzwerk, das ausschließlich Spannungsquellen und ohmsche Widerstände enthält. Dieses kann durch Lösen des innewohnenden linearen Gleichungssystems immer und eindeutig gelöst werden. Das Ergebnis ist die Klemmenspannung  $U_2$ .
- $U_1$  und  $U_2$  werden addiert, das Ergebnis ist die resultierende Klemmenspannung  $U$ .

Die beiden Rechenschritte 1 und 2 sind beliebig vertauschbar!

Dieses Verfahren funktioniert auch in der technischen Realität.

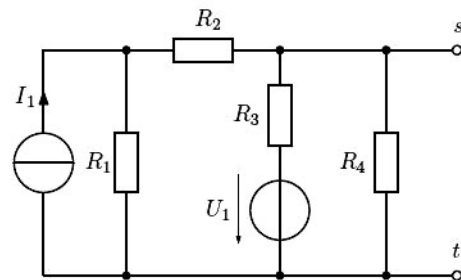
Gegeben sei diese Schaltung.

$$R_1 = 3\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_3 = 2\ \Omega \quad R_4 = 5\ \Omega$$

$$I_1 = 3,75\ \text{A} \quad U_1 = 18\ \text{V}$$

a) Berechne die Spannung zwischen den Anschlüssen s und t.

b) Berechne den Innenwiderstand (Thévenin-Äquivalentwiderstand) der realen Spannungsquelle s-t.



a) Da alle Schaltelemente linear sind, erfolgt die Berechnung mittels des Superpositionsprinzips.

I) Die Stromquelle durch eine Unterbrechung ersetzen. Die Ausgangsspannung  $U_{a1}$  ergibt sich zu

$$U_{a1} = \frac{U_1 \cdot ((R_1 + R_2) \parallel R_4)}{((R_1 + R_2) \parallel R_4) + R_3} = \frac{18 \cdot ((3 + 2) \parallel 5)}{((3 + 2) \parallel 5) + 2} = \frac{18 \cdot (5 \parallel 5)}{(5 \parallel 5) + 2} = \frac{18 \cdot 2,5}{4,5} = 10\text{V}$$

II) Die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzen. Die Spannung an der Stromquelle ergibt sich zu

$$U_q = I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_2 + (R_3 \parallel R_4))) = 3,75 \cdot (3 \parallel (2 + (2 \parallel 5))) = 6\text{V}$$

Die Ausgangsspannung  $U_{a2}$  ergibt sich dementsprechend zu

$$U_{a2} = U_q \cdot \frac{R_3 \parallel R_4}{R_2 + (R_3 \parallel R_4)} =$$

$$\frac{I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_2 + (R_3 \parallel R_4))) \cdot (R_3 \parallel R_4)}{R_2 + (R_3 \parallel R_4)} =$$

$$\frac{3,75 \cdot (3 \parallel (2 + (2 \parallel 5))) \cdot (2 \parallel 5)}{2 + (2 \parallel 5)} =$$

$$\frac{3.75 \cdot (3 \parallel (2 + (1.429))) \cdot (1.429)}{2 + 1.429} =$$

$$\frac{3.75 \cdot (3 \parallel 3.429) \cdot 1.429}{3.429} =$$

$$\frac{3.75 \cdot 1.6 \cdot 1.429}{3.429} = 2.5V$$

III) Die gesamte Spannung zwischen den Anschlüssen s und t ist die Summe der Spannungen  $U_{a1}$  und  $U_{a2} = 12.5V$ .

b) Berechne den Innenwiderstand (Thévenin-Äquivalentwiderstand) der realen Spannungsquelle s-t.

Der Innenwiderstand der realen Spannungsquelle s-t ist zu berechnen, indem die Stromquelle durch eine Unterbrechung und die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt wird.

$$R_i = (R_1 + R_2) \parallel R_3 \parallel R_4 = (3 + 2) \parallel 2 \parallel 5 = 5 \parallel 2 \parallel 5 = 1.11\Omega$$

Wie erfolgt die korrekte Messung der elektrischen Spannung?

Parallel

Wie erfolgt die korrekte Messung des elektrischen Stroms?  
Was ist nach jeder Strommessung unbedingt erforderlich?

In Serie.

Nach der Messung Stromkreis wieder schließen.

Nenne den Innenwiderstand eines idealen Spannungsmessgerätes.

Unendlich.

Nenne den Innenwiderstand eines idealen Strommessgerätes.

Null.

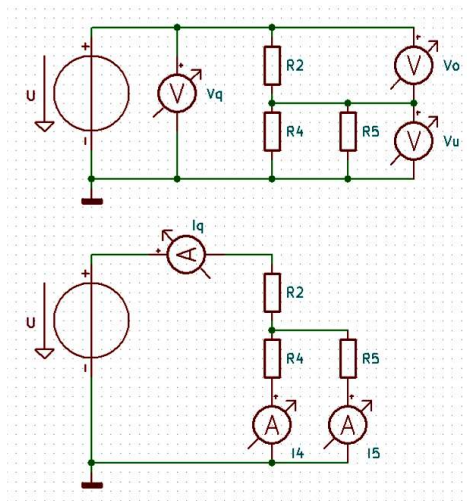
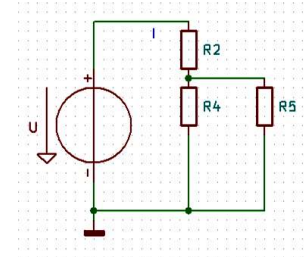
Vervollständige den Satz „Der Strom der aus einem Widerstand heraus fließt ist gleich dem ...“  
der in ihn hinein fließt.

Worauf musst Du bei jeder Widerstandsmessung mit einem Ohmmeter achten? Was tust Du dazu vor der eigentlichen Widerstandsmessung?

Der zu messende Widerstand darf keine Spannung von außerhalb des Ohmmeters erhalten. Vor der Widerstandsmessung daher immer eine Spannungsmessung durchführen.

Gegeben sei diese Schaltung:

Zeichne sämtliche Messungen ein, die notwendig sind, um die Gültigkeit der beiden Kirchhoffschen und des Ohmschen Gesetzes für alle Knoten, Maschen und Widerstände zu beweisen. Stelle dazu die für die Beweise nötigen Gleichungen auf.



1) Kirchhoff 2

$$V_q = V_0 + V_u$$

2) Kirchhoff 1

$$I_q = I_4 + I_5$$

3) Ohm

$$V_u = R_4 \cdot I_4 = R_5 \cdot I_5$$

$$V_0 = I_q \cdot R_2$$

Du möchtest einen elektrischen Widerstand mit wahlfreier Spannung messen.

Welche Standardmethode kannst Du dann nicht mehr verwenden?

Wie gehst Du vor? Welche beiden Methoden gibt es? Was sind ihre jeweiligen Vor- und Nachteile?

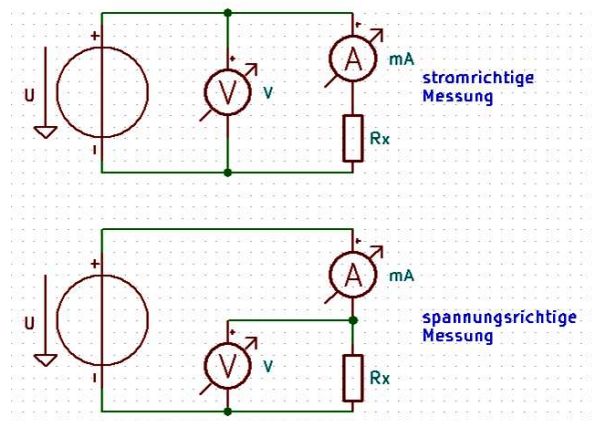
Messung mit dem Ohmmeter.

Spannungsrichtige und stromrichtige Widerstandsmessung.

Um mit einem Voltmeter und einem Milliampereometer einen Widerstand zu messen, kann man zwischen zwei verschiedenen Aufbauten wählen →

Wären Voltmeter und mA – Meter ideal, wären beide Schaltungen äquivalent. Doch leider haben reale Messgeräte ihre parasitären Innenwiderstände.

Aufgrund dieser misst die obere Schaltung zwar den Strom durch Rx korrekt, aber die Spannungsmessung ist falsch, da der Strom zusammen mit dem Innenwiderstand des mA – Meters einen Spannungsabfall ergibt: Das Voltmeter zeigt mehr Spannung an als tatsächlich an Rx anliegt.





Die untere Schaltung hingegen misst die Spannung an  $R_x$  korrekt, nur leider fließt ein zusätzlicher Strom durch den parasitären Innenwiderstand des Voltmeters: Das mA – Meter zeigt einen höheren Strom als tatsächlich durch  $R_x$  fließt.