Repetitorium 5 – Lösungen

Ist das Verknüpfungsgebilde, bestehend aus der Menge $G = \{g: g \in \mathbb{N} \wedge g < 10\}$ und der Operation der Addition eine Gruppe? Wenn nein, warum nicht?

Keine Gruppe, da nicht abgeschlossen bezüglich der Addition. Gegenbeispiel: 7+7 = 14 und schon sind wir aus der Menge draußen.

Ist das Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ein Körper? Hinweis: Keep it simple! „Offensichtlich" gültige Operationen brauchen nicht einzeln bewiesen zu werden. Gib gegebenenfalls die nicht möglichen Operationen an. Nur für Streber: Wie heißt das algebraische Gebilde, dessen Eigenschaften das genannte Verknüpfungsgebilde hat?

Alle Körpereigenschaften sind erfüllt außer dem inversen Element der Multiplikation. Daher ist $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ nur ein Ring.

Beweise, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis:

Annahme

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Wobei p und q teilerfremd sind, der Bruch ist daher durchgekürzt

Quadrieren

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

Daher ist p^2 eine gerade Zahl, das geht aber nur, wenn p auch eine gerade Zahl ist. Wir ersetzen p daher mit einer ganzen Zahl n

$$p = 2n$$

$$2q^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

Kürzen

$$q^2 = 2n^2$$

Daher ist q^2 eine gerade Zahl, das geht aber nur, wenn q auch eine gerade Zahl ist.

Dass aber p und q gerade sein müssen, ist ein Widerspruch zur ersten Annahme. Die Annahme ist damit widerlegt und die Quadratwurzel aus 2 ist keine rationale Zahl.

Gib eine rationale Cauchy – Folge an, deren Grenzwert $\sqrt{2}$ ist. Beweise, dass es eine Cauchy – Folge ist. Hinweise: Die Folge darf auch rekursiv definiert sein. Keep it simple! Das ist keine Analysis – Vorlesung!

Wir verwenden die Heron – Formel, aber gleich mit einem besseren Startwert

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, a_1 = 1{,}5$$

Bestimmung des Grenzwertes. Falls die Folge konvergent ist, muss beim Grenzwert gelten

$$a_{n+1} = a_n$$

Wir nennen den Grenzwert daher x und schreiben

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$x^2 = 2$$

Sollte die Folge konvergieren, konvergiert sie tatsächlich gegen die Quadratwurzel von 2.

Konvergenzbeweis:

Ausrechnen zeigt, dass die Folge streng monoton fallend ist. Das ist einmal zu beweisen

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < a_n$$

$$\frac{{a_n}^2 + 2}{2a_n} < a_n$$

$a_n > 0$

$${a_n}^2 + 2 < 2{a_n}^2$$

$$2 < {a_n}^2$$

Das heißt, so lange $a_n > \sqrt{2}$ ist, ist die Folge streng monoton fallend. Also wählen wir einen Startwert $> \sqrt{2}$, das haben wir mit 1,5 getan. Da a_n nicht negativ werden kann, ist die Folge beschränkt: Nach unten mit Null und nach oben mit 1,5. Eine monoton fallende Folge konvergiert genau dann, wenn sie nach unten beschränkt ist, und ihr Grenzwert ist dann mindestens so groß wie die untere Schranke. Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Erfinde ein Polynom 5. Grades und eine Stelle ungleich 0. Berechne den Funktionswert klassisch und mittels Horner – Schema. Vergleiche die Anzahl an Multiplikationen und Additionen bei den beiden Verfahren.

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

$$x = 2$$

Klassisch:

$$2^5 + 3 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 =$$

$$32 + 3 \cdot 16 - 7 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 3 = 25$$

14 Multiplikationen und 5 Additionen

mittels Horner – Schema

$$x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 3 =$$

$$(x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x - 5) \cdot x + 3 =$$

$$((x^3 + 3x^2 - 7x + 2) \cdot x - 5) \cdot x + 3 =$$

$$(((x^2 + 3x - 7) \cdot x + 2) \cdot x - 5) \cdot x + 3 =$$

$$((((x + 3) \cdot x - 7) \cdot x + 2) \cdot x - 5) \cdot x + 3 =$$

$$((((2 + 3) \cdot 2 - 7) \cdot 2 + 2) \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$(((5 \cdot 2 - 7) \cdot 2 + 2) \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$(((10 - 7) \cdot 2 + 2) \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$((3 \cdot 2 + 2) \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$((6 + 2) \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$(8 \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$(16 - 5) \cdot 2 + 3 =$$

$$11 \cdot 2 + 3 =$$

$$22 + 3 = 25$$

4 Multiplikationen und 5 Additionen

Bestimme die Gleichungen der Geraden durch die Punkte (3,1) und (4,5)

- Implizit

$$3a + b = 1$$
$$4a + 5b = 1$$

$$-12a - 4b = -4$$
$$12a + 15b = 3$$

$$+11b = -1$$

$$b = \frac{-1}{11}$$

$$3a - \frac{1}{11} = 1$$

$$33a - 1 = 11$$

$$33a = 12$$

$$a = \frac{12}{33}$$

$$\frac{12}{33}x - \frac{3}{33}y - 1 = 0$$

$$12x - 3y - 33 = 0$$

$$\boxed{4x - y - 11 = 0}$$

Probe:

$$4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 11 = 12 - 1 - 11 = 0$$
$$4 \cdot 4 - 1 \cdot 5 - 11 = 16 - 5 - 11 = 0$$

- Explizit

$$4x - y - 11 = 0$$

$$y = 4x - 11$$

- Normalvektorform

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x_0}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfügen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probe

$$4x - y = 12 - 1$$

Passt.

- Hessesche Normalform

$$\overrightarrow{n_e} \cdot \vec{x} - \mathrm{d} = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{n_e} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{11}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \frac{11}{\sqrt{17}} = 0$$

- Richtungsvektor(Parameter)form

$$\vec{x} = \overrightarrow{x_0} + t \cdot \vec{r}$$

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Normalabstand des Punktes (11,7) von dieser Geraden.

$$p = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{44-7}{\sqrt{17}} - \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{37}{\sqrt{17}} - \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{26}{\sqrt{17}} \approx 6{,}3$$

Gegeben sei die Funktion $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 3$. Gib die lineare Approximation an der Stelle $\mathrm{x} = 1$ an.

$$\mathrm{f(x)} \approx \mathrm{f}(x_0) + (\mathrm{x} - x_0) \cdot \mathrm{f}'(x_0)$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 2x$$

$$\mathrm{f}'(1) = 2$$

$$\mathrm{f(x)} \approx 4 + (\mathrm{x} - 1) \cdot 2 = 4 + 2\mathrm{x} - 2 = 2\mathrm{x} + 2$$

Die Aufladung eines RC – Gliedes verhalte sich gemäß der Formel $U = 1 - e^{-t}$. Gib die lineare Approximation an der Stelle $t = 0$ an. Zu welchem Zeitpunkt t weicht die Approximation mehr als 1% von der korrekten Funktion ab?

$$f(t) \approx f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0)$$

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

$$f(0) = 1 - e^{-0} = 0$$

$$f'(t) = e^{-t}$$

$$f'(0) = e^{-0} = 1$$

$$f(t) \approx 0 + (t) \cdot 1 = t$$

Berechnung der Abweichung. Da die lineare Funktion schneller wächst als die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten, sparen wir durch Nachdenken den Betrag:

$$1 - e^{-t} = 0{,}99\,t$$

$$1 - e^{-t} - 0{,}99\,t = 0$$

Dieser Wert ist analytisch schwierig zu berechnen. Wir greifen zum guten alten Newton.

$$f(x) = 1 - e^{-t} - 0{,}99\,t$$

$$f'(x) = e^{-t} - 0{,}99$$

Als Startwert erfinden wir 0,1.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - e^{-x_n} - 0{,}99\,x_n}{e^{-x_n} - 0{,}99}$$

xn	xn+1
0,1	0,05494009
0,05494009	0,03348168
0,03348168	0,02390836
0,02390836	0,02064541
0,02064541	0,02014671
0,02014671	0,02013446
0,02013446	0,02013445

Nach etwa 0,02.

Gegeben sei die Funktion $x^3 + 3{,}4x^2 - 1{,}67x - 4{,}62 = 0$
Bestimme die Nullstellen mittels des Newtonschen Näherungsverfahrens. Gib die Produktdarstellung an. Hinweis: Alle Nullstellen sind rational.

Zuerst lokalisieren wir die Nullstellen mit einem groben Raster

x	f(x)
-4	-7,54
-3,5	0
-3	3,99
-2,5	5,18
-2	4,32
-1,5	2,16
-1	-0,55
-0,5	-3,06
0	-4,62
0,5	-4,48
1	-1,89
1,5	3,9
2	13,64
2,5	28,08
3	47,97
3,5	74,06
4	107,1

Zufällig haben wir damit bereits die erste Nullstelle -3,5 gefunden. Die zweite liegt zwischen -1,5 und -1 und die dritte zwischen 1 und 1,5.

Aufstellen der Newton – Approximation:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x^3 + 3{,}4x^2 - 1{,}67x - 4{,}62$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6{,}8x - 1{,}67$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,3} + 3{,}4x_n^{\,2} - 1{,}67x_n - 4{,}62}{3x_n^{\,2} + 6{,}8x_n - 1{,}67}$$

Startwert -1,5

x	f(x)	f´(x)	x-f(x)/f´(x)
-1,5	2,16	-5,12	-1,078125
-1,078125	-0,12069168	-5,51418945	-1,10001247
-1,10001247	6,8859E-05	-5,52000249	-1,1
-1,1	1,5556E-11	-5,52	-1,1

Nach zwei Schritten haben wir die zweite Nullstelle x = -1,1.

Startwert +1

x	f(x)	f´(x)	x-f(x)/f´(x)
1	-1,89	8,13	1,23247232
1,23247232	0,35844123	11,2677759	1,20066115
1,20066115	0,00715005	10,8192574	1,20000028
1,20000028	3,0578E-06	10,810004	1,2

Nach zwei Schritten haben wir die dritte Nullstelle x = 1,2.

Produktdarstellung

$$f(x) = (x + 3{,}5\,) \cdot (x + 1{,}1\,) \cdot (x - 1{,}2\,)$$

Bestimme den Kehrwert der Zahl 7 mittels des Newton–Raphson-Divisions-Verfahrens. Wie findest Du einen geeigneten Startwert?

Der Startwert ergibt sich beispielsweise durch die Näherung, wenn 0,5 < N < 1

$$\frac{1}{N} \approx \frac{48}{17} - \frac{32N}{17}$$

Also

$$\frac{0{,}1}{0{,}7} \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{48}{17} - \frac{32 \cdot 0{,}7}{17}\right) = 0{,}1506$$

Damit sind wir nur mehr 5,9% vom richtigen Wert entfernt.

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - \mathrm{N} \cdot x_n)$$

x(n)	x(n+1)
0,1506000000000000	0,1424374800000000
0,1424374800000000	0,1428559100387470
0,1428559100387470	0,1428571428465040

Und nach zwei Schritten haben wir 10 signifikante Stellen erreicht.

Gegeben sei die Funktion $z = f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Finde die besten linearen Approximationen an den Stellen (0,0) und (1,2).

$$\mathrm{f}(\vec{x}) \approx \mathrm{f}(\overrightarrow{x_0}) + (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \cdot \nabla \mathrm{f}(\overrightarrow{x_0})$$

$$\nabla \mathrm{f}(\vec{x}) = (4\mathrm{x}, 6\mathrm{y})$$

$$\nabla \mathrm{f}(\overrightarrow{x_1}) = (0,0)$$

$$\nabla \mathrm{f}(\overrightarrow{x_2}) = (4,12)$$

$$\mathrm{z}_1 = (0) + \left(\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}4\mathrm{x}\\6\mathrm{y}\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

Das war trivial: Die Tangentialebene ist die x – y – Ebene.

$$\mathrm{z}_2 = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2) + \left(\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}4\mathrm{x}\\6\mathrm{y}\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{z}_2 = (2 + 12) + \begin{pmatrix}\mathrm{x} - 1\\\mathrm{y} - 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{z}_2 = 14 + 4\mathrm{x} - 4 + 12\mathrm{y} - 24 = 4\mathrm{x} + 12\mathrm{y} - 14$$

Gib die Taylor – Reihe für sin(x) an der Entwicklungsstelle x = 0 an. Wie heißt diese spezielle Reihe?

Die MacLaurin– Reihe

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{n}}(0)}{\mathrm{n}!} \cdot \mathrm{x}^n$$

für sin(x) lautet

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f}(0)}{0!} \cdot \mathrm{x}^0 + \frac{\mathrm{f}'(0)}{1!} \cdot \mathrm{x}^1 + \frac{\mathrm{f}''(0)}{2!} \cdot \mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{f}'''(0)}{3!} \cdot \mathrm{x}^3 +$$

$$\sin(\mathrm{x}) = \frac{\sin(0)}{1} \cdot 1 + \frac{\cos(0)}{1} \cdot \mathrm{x} + \frac{-\sin(0)}{2} \cdot \mathrm{x}^2 + \frac{-\cos(0)}{6} \cdot \mathrm{x}^3 +$$

$$\sin(\mathrm{x}) = \frac{0}{1} \cdot 1 + \frac{1}{1} \cdot \mathrm{x} + \frac{0}{2} \cdot \mathrm{x}^2 + \frac{-1}{6} \cdot \mathrm{x}^3 +$$

$$\sin(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^3}{6} + \cdots$$

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Finde die besten quadratischen Approximationen an den Stellen (0,0) und (1,2).

$$\mathrm{f}(\vec{x}) \approx \mathrm{f}(\overrightarrow{x_0}) + (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \cdot \nabla \mathrm{f}(\overrightarrow{x_0}) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{x_0})^T \cdot H_f(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{x_0})$$

Die Approximation an der Stelle 0,0 ist trivial z = 0.

$$\mathrm{z} \approx (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2) + \left(\binom{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} - \binom{1}{2}\right) \cdot \binom{4\mathrm{x}}{6\mathrm{y}} \Big| \binom{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x - 1, y - 2) \cdot H_f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \left(\binom{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} - \binom{1}{2}\right)$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 (2x^2 + 3y^2)}{\partial x \partial x}\right) & \left(\frac{\partial^2 (2x^2 + 3y^2)}{\partial x \partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 (2x^2 + 3y^2)}{\partial y \partial x}\right) & \left(\frac{\partial^2 (2x^2 + 3y^2)}{\partial y \partial y}\right) \end{pmatrix}$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial (4x)}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial (4x)}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial (6y)}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial (6y)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{z} \approx (2 + 12) + \binom{\mathrm{x} - 1}{\mathrm{y} - 2} \cdot \binom{4}{12} + \frac{1}{2} \cdot (x - 1, y - 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left(\binom{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} - \binom{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{z} \approx 14 + 4\mathrm{x} - 4 + 12\mathrm{y} - 24 + (x - 1, y - 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \binom{\mathrm{x} - 1}{\mathrm{y} - 2}$$

$$\mathrm{z} \approx 14 + 4\mathrm{x} - 4 + 12\mathrm{y} - 24 + \binom{2x - 2}{3y - 6} \cdot \binom{\mathrm{x} - 1}{\mathrm{y} - 2}$$

$$\mathrm{z} \approx 4\mathrm{x} + 12\mathrm{y} - 14 + 2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 2\mathrm{x} + 2 + 3\mathrm{y}^2 - 6\mathrm{y} - 6\mathrm{y} + 12$$

$$\mathrm{z} = 2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{y}^2$$