# Übungen – Lösungen

An einem Verstärker liegen am Eingang 12mVrms. Der Eingangswiderstand beträgt 10kΩ. Am Ausgang liefert er 12Vrms an einem Lastwiderstand von 4Ω.

a) Wie viele dB Spannungsverstärkung hat der Verstärker?

$$L = 20\ \lg \frac{12V}{12mV} = 20 * 3 = 60\ dB$$

b) Wie viele dBVrms liegen am Ausgang?

$$L = 20\ \lg \frac{12V}{1\ V} = 21{,}6\ dBVrms$$

c) Wie viele dB Leistungsverstärkung hat der Verstärker?

$$L = \ 10\ lg \frac{\frac{12^2}{4}}{\frac{12m^2}{10000}} = 10 \lg \frac{1{,}44 * \ 10^6}{576 * \ 10^{-6}} = 10 \lg 2{,}5 * \ 10^9 = 94\ dB$$

d) Wie viele dBu liegen am Ausgang?

$$L = 20\ \lg \frac{12V}{0{,}7746V} = 23{,}8\ dBu$$

e) Wie viele dBm werden vom Widerstand in Wärme umgewandelt?

$$L = \ 10\ lg \frac{\frac{12^2}{4}}{0{,}001} = 10 \lg \frac{36}{1 * \ 10^{-3}} = 10 \lg 36 * \ 10^3 = 45{,}6\ dBm$$

f) Wie viele dBW werden vom Widerstand in Wärme umgewandelt?

$$L = \ 10\ lg \frac{\frac{12^2}{4}}{1} = 10 \lg \frac{36}{1} = 10 \lg 36 = 15{,}6\ dBW$$

Auf einer 1dm² großen Metallplatte befinden sich $10^6$ Elektronen. Berechne die Flächenladungsdichte σ

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{-2}} = 1{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{As}{m^2}$$

Zwei 1cm² große Metallplatten sind auf den beiden Seiten eines 0,1mm dicken Isolierwerkstoffes mit der relativen Permittivität $\varepsilon_r = 4$ montiert. Berechne die Kapazität dieses Aufbaues. Gib den Wert mit dem angemessenen SI – Präfix an.

$$C = \ \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = \ 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-4}} = 35{,}4\ pF$$

Gesucht ist der Kapazitätswert einer Konduktorkugel mit 2m Durchmesser (!) im Vakuum. Der Kapazitätswert ist einerseits mit dem gebräuchlichen SI – Präfix, andererseits im elektrostatischen CGS – Einheitensystem anzugeben.

$$A(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

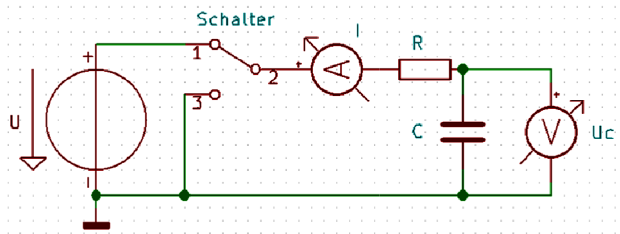
$$C = \frac{\varepsilon_0}{\int_R^\infty \frac{dr}{A(r)}} = \frac{\varepsilon_0}{\int_R^\infty \frac{dr}{4 \cdot \pi \cdot r^2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{-1}{r}\Big|_R^\infty} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{0 - \frac{-1}{R}} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathrm{R}$$

Einsetzen der konkreten Werte ergibt

$$C = 4 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 1\,[\mathrm{m}] \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10}\, F = 111 pF$$

Im elektrostatischen CGS – Einheitensystem sind das 100cm.

Berechne die Funktion der Entladung des Kondensators im RC – Tiefpass.




Wir untersuchen diese Schaltung. Von links nach rechts sehen wir eine ideale Spannungsquelle, die die feste Spannung U abgibt. Danach einen Umschalter, der für den Anfang die Kontakte 1 – 2 verbindet und damit dafür sorgt, dass der Kondensator völlig aufgeladen ist. Zu Beginn des Versuchs wird der Schalter umgeschaltet, damit werden die Kontakte 1 – 2 getrennt und 3 – 2 verbunden, der der Kondensator wird langsam entladen. Der Strom in das Glied R – C wird mit dem idealen Strommessgerät I gemessen und die Spannung am Kondensator mit dem idealen Voltmeter Uc. Gesucht ist die Spannung Uc als Funktion der Zeit.

Der Strom I ist durch die Spannung an R und den Wert von R gegeben (auf das Vorzeichen aufpassen!):

$$I = -\frac{U_c(t)}{R}$$

Des Weiteren wissen wir, dass die Spannung Uc eine Funktion des Stroms und der Zeit bezüglich des Kapazitätswertes von C ist:

$$I = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}$$

Da uns der Strom selbst nicht interessiert, setzen wir die beiden Gleichungen gleich:

$$-\frac{U_c(t)}{R} = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}$$

TdV

$$-\frac{dt}{R \cdot C} = \frac{dU_c(t)}{U_c(t)}$$

$$\int -\frac{dt}{R \cdot C} = \int \frac{dU_c(t)}{U_c(t)}$$

$$-\frac{t}{R \cdot C} + \widetilde{K} = \ln\ |U_c(t)|$$

$$K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_c(t)$$

Die Anfangsbedingung Uc(0) = U einsetzen, um K zu bestimmen.

$$K \cdot e^{-\frac{0}{R \cdot C}} = U$$

$$K = U$$

Einsetzen

$$U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_c(t)$$

Seitenwechsel

$$U_c(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Und fertig ist die Gleichung für die Entladung des Kondensators.

Berechne die Grenzfrequenz eines RC – Filters in Hertz.

Grenzfrequenz bedeutet, dass Ω = 1 ist.

$$\Omega = \omega \cdot R \cdot C = 1$$

Elementarumformung

$$\omega = \frac{1}{R\ C}$$

Wenn ω die Grenzkreisfrequenz ist, gilt

$$\omega = 2\ \pi\ f_g$$

Elementarumformung

$$f_g = \frac{1}{2\ \pi\ R\ C}$$

Im Bereich Musik und Audio ist die Angabe 20dB/Dekade wenig praktikabel. Man gibt hingegen 6dB/Oktave an, was dasselbe ist. Begründe diese Gleichsetzung:

1 Dekade ist ein Frequenzverhältnis von 1:10
1 Oktave ist ein Frequenzverhältnis von 1:2

20dB sind ein Spannungsverhältnis von 1:10

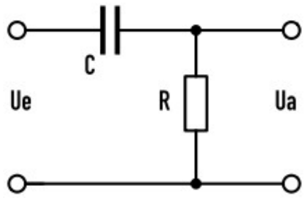
$$20 = 20\ lg \frac{U_{out}}{1} dB\ \rightarrow lg\ U_{out} = 1 \rightarrow\ U_{out} = 10$$

6dB sind ein Spannungsverhältnis von 1:2

$$6 = 20\ lg \frac{U_{out}}{1} dB\ \rightarrow lg\ U_{out} = 0{,}3 \rightarrow\ U_{out} = 2$$

Daher sind beide Angaben gleichwertig.

Berechne die Übertragungsfunktion eines RC – Hochpassfilters. Skizziere die Schaltung. Berechne dazu die Grenzfrequenz sowie die Abschwächung und die Phasenlage bei Grenzfrequenz. Skizziere das Bode – Diagramm.




Die Übertragungsfunktion H eines RC – Hochpassfilters lautet

$$H = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R+Z} = \frac{R}{R+\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}} = \frac{R}{\frac{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C}{j\cdot\omega\cdot C}} = \frac{j\cdot\omega\cdot R\cdot C}{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C} = \frac{j\cdot\Omega}{1+j\cdot\Omega}$$

Bei Grenzfrequenz gilt $\Omega = 1$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{j}{1+j} = \frac{j(1-j)}{(1+j)\cdot(1-j)} = \frac{1+j}{2} = \frac{1}{2}+\frac{j}{2}$$

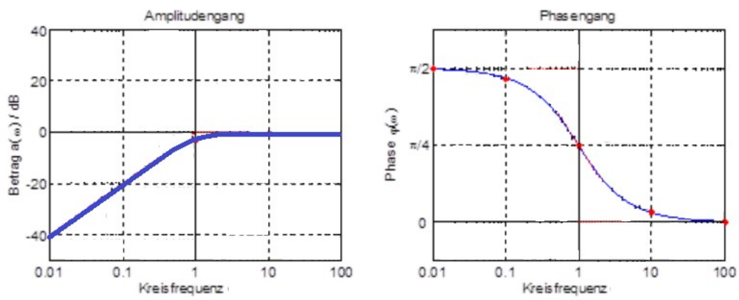
Betrag

$$r = |H| = \left|\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

$$\varphi = arctan\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = arctan\ 1 = 45°$$

Die Ausgangsspannung beträgt daher -3dB, der Phasenwinkel +45°.

Das Bode - Diagramm




Eine 10V 2W Kontroll – Lampe ist energiesparend an der Netzspannung zu betreiben. Wie machst Du das? Berechne die notwendigen Werte.

Es wird ein kapazitiver Blindwiderstand verwendet.

Berechnung des kapazitiven Blindwiderstandes

$$X_c = \frac{U}{I} = \frac{230V - 10V}{0{,}2A} = 1{,}1k\Omega$$

Umrechnung auf den Kapazitätswert

$$X_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

Die Netzfrequenz beträgt 50Hz

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1{,}1\mathrm{k}\Omega} \approx 3\mu F$$