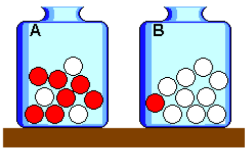
Praktische Mathematik 1 für TPH **Übungsblatt 9** 13.12.2021

1. Betrachten Sie zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$. Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind gegeben als
$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad P(B) = \frac{17}{30}.$$
Desweiteren ist die bedingte Wahrscheinlichkeit
$$P(A|B) = \frac{3}{5}$$
gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$$P(A^C) \qquad \text{und} \qquad P(B|A), \qquad \text{sowie} \qquad P(B|A^C).$$
Lösung. $P(A^C) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{51}{100}$, $P(B|A^C) = \frac{17}{25}$

2. Betrachten Sie das Beispiel zweier (unterscheidbarer) Urnen mit jeweils 10 Kugeln. In Urne A sind 3 weiße und 7 rote, in Urne B sind 9 weiße und 1 rote Kugel. Die Ereignisse sind definiert durch



Ereignis	Beschreibung
A	Kugel stammt aus Urne A
B	Kugel stammt aus Urne B
R	Kugel ist rot

und die Wahrscheinlichkeiten gegeben als
$$P(A) = P(B) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(R|A) = \tfrac{7}{10} \qquad \text{und} \qquad P(R|B) = \tfrac{1}{10}.$$

(a) Berechnen Sie
$$P(R), \qquad P(A|R) \quad \text{und} \quad P(R^C|A).$$

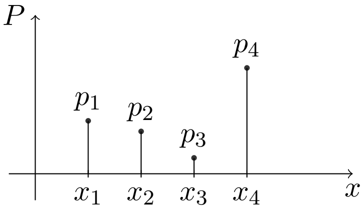
(b) Sind die Ereignisse A und R unabhängig? Begründen Sie die Antwort!

Bemerkung: Die gefragten Wahrscheinlichkeiten können durch Verwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet werden, ohne auf das Urnenexperiment einzugehen. Es ist aber sinnvoll die Berechnungen mit Hilfe eines Baumdiagramms für das Ziehen der Kugeln zu verifizieren.

Lösung. (a) $P(R) = \frac{2}{5}$, $P(A|R) = \frac{7}{8}$, $P(R^C|A) = \frac{3}{10}$

3. Zeigen Sie: Sind A und B stochastisch unabhängig, dann sind auch A und B^C stochastisch unabhängig, ebenso B und A^C, sowie A^C und B^C.

4. Betrachten Sie die Funktion P in der Abbildung



mit $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_3 = c$, $p_4 = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie

(a) $c \in \mathbb{R}^+$, sodass P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt,

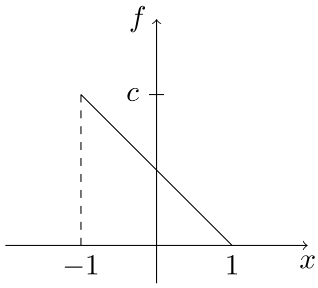
(b) geben Sie $F(x)$ an und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Berechnen Sie $P(X < x_2)$ sowie $P(X \leq x_2)$.

Lösung. (a) $c = \frac{1}{20}$,

(b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1, \\ \frac{1}{4} & x_1 \leq x < x_2, \\ \frac{9}{20} & x_2 \leq x < x_3, \\ \frac{1}{2} & x_3 \leq x < x_4, \\ 1 & x \geq x_4 \end{cases}$, (c) $P(X < x_2) = \frac{1}{4}$, $P(X \leq x_2) = \frac{9}{20}$

5. Sei X eine stetige Zufallsvariable. Betrachten Sie die Funktion f, dargestellt in der folgenden Abbildung.



(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X an und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Berechnen Sie $P(0 \leq X < \frac{1}{2})$.

Lösung. (a) $c = 1$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}, & -1 \leq x \leq 1,, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

(c) $P(0 \leq X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$

6. Nehmen wir an, es wird mit zwei Würfeln geworfen und man betrachtet die Summe der Augenzahlen.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme genau 10 beträgt?

   (b) Betrachten wir nur die Würfe mit Augensumme 10: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfel die gleiche Zahl zeigen?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 10 beträgt?

   (d) Betrachten wir alle überhaupt möglichen Würfe insgesamt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augensumme von mindestens 10 mit einem Wurf, bei dem beide Würfel die gleiche Zahl zeigen, erreicht wird ?