Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2022

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe A (Fr, 24.06.2022) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $B \in (0,1)$:

$$x'(t) = -tx(t) + 2e^{-2t} \quad t \in [0,B], \quad x(0) = 0.$$

a) (0.5 Punkte) Schreiben Sie die Differentialgleichung in eine dazu äquivalente Integralgleichung um.

Beidseitige Integration der Gleichung $x' = f(x(t),t)$ nach t liefert

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s),s)ds.$$

Dabei ist $x(0) = 0$ und $f(x(s),s) = -sx(s) + 2e^{-2s}$. Die gesuchte Integralgleichung lautet

$$x(t) = \int_0^t \left(-sx(s) + 2e^{-2s}\right) ds, \quad t \in [0,B].$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass diese Integralgleichung eine eindeutige Lösung $x \in C[0,B]$ besitzt.
Hinweis:

- *Schreiben Sie die Angabe als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,B], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,B], \|\cdot\|_\infty)$.*
  Der Beweis, dass $Fx \in (C[0,B], \|\cdot\|_\infty)$ für $x \in (C[0,B], \|\cdot\|_\infty)$ darf entfallen.

- *Beweisen sie danach, dass F eine Kontraktion ist.*

Der Operator F ist für $x \in C[0,B]$ durch

$$(Fx)(t) = \int_0^t \left(-sx(s) + 2e^{-2s}\right) ds$$

definiert.

Nun beweisen wir, dass F eine Kontraktion auf $(C[0,B], \|\cdot\|_\infty)$ ist.

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \max_{t\in[0,B]} \left| \int_0^t (-sx_1(s) + 2e^{-2s})ds - \int_0^t (-sx_2(s) + 2e^{-2s})ds \right| = \\
&= \max_{t\in[0,B]} \left| \int_0^t s(x_1(s) - x_2(s))ds \right| \leq \max_{t\in[0,B]} \int_0^t |s(x_1(s) - x_2(s))|ds = \\
&= \max_{t\in[0,B]} \int_0^t s|x_1(s) - x_2(s)|ds \leq \max_{t\in[0,B]} \int_0^t s\|x_1 - x_2\|_\infty ds = \\
&= \|x_1 - x_2\|_\infty \max_{t\in[0,B]} \int_0^t sds = \frac{B^2}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Da $B \in (0,1)$ und somit $\frac{B^2}{2} \in (0,1)$ gilt, ist F eine Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt daher die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,B]$ mit $Fx = x$. Somit existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung.

c) (1.5 Punkte) Berechnen Sie eine Näherung dieser Lösung, indem Sie die ersten Schritte x_1 und x_2 einer Picarditeration durchführen.

Am Anfang wird der Startwert $x_0(s) = 0$ für x eingesetzt.

$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t \left(-s x_0(s) + 2e^{-2s}\right) ds = 2\int_0^t e^{-2s} ds = 1 - e^{-2t}.$$

Im zweiten Iterationsschritt erhalten wir den folgenden Ausdruck.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x(0) + \int_0^t \left(-s x_1(s) + 2e^{-2s}\right) ds = \int_0^t \left(-s + s e^{-2s} + 2e^{-2s}\right) ds = \\ &= \frac{1}{4}(5 - 2t^2 - e^{-2t}(5 + 2t)). \end{aligned}$$

d) (2 Punkte) Gegeben sei nun die Differentialgleichung

$$x'(t) = 2x(t)$$

mit $x(0) = 3$. Führen Sie eine Picarditeration durch und finden Sie die Reihendarstellung des n-ten Iterationsschritts $x_n(t)$. Vergleichen Sie dies mit der exakten Lösung der Differentialgleichung.

Zunächst führen wir eine Picarditeration durch.

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 3 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t 2x_0(s)ds = 3 + 6t = 3(1 + 2t) \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t 2x_1(s)ds = 3 + 6t + 6t^2 = 3(1 + 2t + 2t^2) \\
x_3(t) &= x_0 + \int_0^t 2x_2(s)ds = 3 + 6t + 6t^2 + 4t^3 = 3(1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3)
\end{aligned}$$

Nun können wir auf den n-ten Iterationsschritt schließen.

$$x_n(t) = 3\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}\right)$$

Im Limit $n \to \infty$ erhalten wir die exakte Lösung

$$x(t) = 3e^{2t}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Funktionenfolge

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}, ..., \left(\frac{1}{2}\right)^{nx}, ...\right\}.$$

a) (2 Punkte) Sei nun $x = 1$ in obiger Funktionenfolge, somit erhalten wir eine Folge $u_1 \in \ell^2$. Diese spannt gemeinsam mit der Folge

$$u_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$$

einen Unterraum $M \subset \ell^2$ auf. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von M bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

und der Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

in ℓ^2.

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

u_2 ist bereits normiert:

$$\varphi_2 = u_2.$$

Berechne φ_1 mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1 &= u_1 - \langle u_1, \varphi_2\rangle\varphi_2 = \\ &= \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, ...\right).\end{aligned}$$

Berechne die Norm um anschließend normieren zu können:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}_1\|_2 &= \sqrt{0 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + ...} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - 1 - \frac{1}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Nun können wir φ angeben:

$$\varphi_1 = \frac{\tilde{\varphi}_1}{\|\tilde{\varphi}_1\|_2} =$$
$$= 2\sqrt{3}\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, ...\right).$$

Die so bestimmte Orthonormalbasis von M lautet

$$\phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion der Folge u_3 auf den Unterraum M.

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots \right)$$

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1$

Die Projektion von u_3 auf M lautet

$$\mathcal{P}_M(u_3) = \langle u_3, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle u_3, \varphi_2 \rangle \varphi_2.$$

$$\begin{aligned}
\langle u_3, \varphi_1 \rangle &= 2 \left(0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots \right) = \\
&= -2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 1 + \frac{1}{2} \right) = \\
&= -2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\
\langle u_3, \varphi_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Somit ist die Orthogonalprojektion

$$\mathcal{P}_M(u_3) = -\frac{1}{3}\, \varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\, \varphi_2.$$

c) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $I = [0,2]$:

- Geben Sie die Grenzfunktion $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in I$ an.
- Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Konvergiert die Folge $\{f_n\}$ für alle $x \in I$, so heißt $\{f_n\}$ **punktweise konvergent** auf I. $f_n(x)$ konvergiert dann gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in I.$$

Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf I gegen die Funktion $f(x)$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\{f_n\}$ **ist punktweise konvergent auf I**, sie konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{nx} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

$\{f_n\}$ **ist nicht gleichmäßig konvergent auf I**, da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0<x\leq 2} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{nx} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\cdot 0} = 1.$$

• **Aufgabe 3.** Berechnen Sie, mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes, folgendes Integral entlang der gegebenen Kurven und geben Sie im Endergebnis **alle** Lösungen des **ersten Hauptzweiges** beim Wurzelziehen an,

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{2\sqrt[3]{4z(\frac{z}{2}-i)^3}}{(z-2i)(z^2-2z+i(4-2z))}dz,$$

$$\Gamma_1 = C_2(1),\ \Gamma_2 = C_2(i),\ \text{mit } C_r(z_0) \text{ als Kreis mit Radius r um den Punkt } z_0.$$

a) (1.5 Punkte) Überprüfen Sie die notwendigen Bedingungen und wenden Sie den Cauchy'schen Integralsatz an.
Hinweis: Der Integrand kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1+i}{4}\frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2} - \frac{1+i}{4}\frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2i}$$

Die Kurve ist geschlossen, glatt und Rand eines Gebietes D, in dem $f(z) = \sqrt[3]{4z}$ existiert. $f(z)$ ist analytisch in D, sowie am Rand von D, also auch stetig am Rand. Zumindest eine der Polstellen liegt in D.
Da alle Kriterien erfüllt sind, verwenden wir den Cauchy'schen Integralsatz und erhalten

$$= \begin{cases} C_2(1): \ 2\pi i\frac{1+i}{4}\sqrt[3]{8} = \pi(i-1)e^{i\frac{n2\pi}{3}} \\ C_2(i): \ -2\pi i\frac{1+i}{4}\sqrt[3]{8i} = \pi(1-i)e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{n2\pi}{3})} \end{cases} n = 0, 1, 2.$$

Da jeweils nur eine Polstelle des Integranden innerhalb der geschlossenen Kurve liegt. Wir haben dabei berücksichtigt, dass wir für die Wurzel eine Schar äquivalenter Lösungen erhalten, die für gegebene n im ersten Hauptzweig liegen.

b) (2.5 Punkte) Leiten Sie die im Hinweis unter a) gegebene Form des Integranden, ausgehend von der ursprünglich gegebenen Form, her.

Wir vereinfachen soweit wie möglich.

$$\frac{2\sqrt[3]{4z(\frac{z}{2}-i)^3}}{(z-2i)(z^2-2z+i(4-2z))} = \frac{(z-2i)\sqrt[3]{4z}}{(z-2i)(z^2-2z+i(4-2z))} = \frac{\sqrt[3]{4z}}{z^2-2z+i(4-2z)}$$

$$z^2-2z+4i-2iz = z^2-2(i+1)z+4i$$

$$z_{1,2} = 1+i \pm \sqrt{-2i}$$
$$\sqrt{-2i} = i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = i\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = i-1$$
$$z_1 = 2i,\ z_2 = 2$$

Wir verwenden Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{(z-2i)(z-2)} = \frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-2i}$$
$$1 = A(z-2i)+B(z-2)$$
$$z=2i:\ B = -\frac{1}{4}(1+i)$$
$$z=2:\ A = \frac{1}{4}(1+i)$$

Das Integral wird zu

$$\frac{1+i}{4}\oint_{\Gamma_i}\frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2}dz - \frac{1+i}{4}\oint_{\Gamma_i}\frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2i}dz.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie folgendes komplexe Kurvenintegral

$$\int_\Gamma (3z^2 - z)\, dz,$$
$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + i \sin\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in [-2\pi, 4\pi] \right\},$$

mit dem Anfangspunkt $z_1 = -2\pi$ und Endpunkt $z_2 = 4\pi$.

Wir stellen fest, dass der Integrand analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ ist. Damit ist das Integral auf ganz $\mathbb{C}$ wegunabhängig und es macht Sinn von "dem" Wert des Integrals von z_1 nach z_2 zu sprechen. Folglich können wir direkt eine Stammfunktion an den Grenzen auswerten und erhalten

$$\int_{z_1}^{z_2} (3z^2 - z)\, dz = z^3 - \frac{z^2}{2}\bigg|_{z_1}^{z_2} = 72\pi^3 - 6\pi^2.$$