Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH

2. Haupttest (Fr, 17.06.2022) (*mit Lösung*)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei der Differentialoperator L mit

$$Lu(x) = u'''(x) - 6u''(x) + 11u'(x) - 6u(x).$$

a) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass eine Fundamentallösung $U(x)$ der obigen Differentialgleichung die Form

$$U(x) = \begin{cases} A_1 e^x + B_1 e^{2x} + C_1 e^{3x} & x > 0 \\ A_2 e^x + B_2 e^{2x} + C_2 e^{3x} & x < 0 \end{cases}$$

haben muss.

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0\ \forall x \neq 0$.

$$LU(x) = U'''(x) - 6U''(x) + 11U'(x) - 6U(x) = 0,\ \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = Ae^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ LU(x) = (\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)Ae^{\lambda x} &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0 \\ \Rightarrow\ \lambda_{1,2,3} &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U(x) = \begin{cases} A_1 e^x + B_1 e^{2x} + C_1 e^{3x} & x > 0 \\ A_2 e^x + B_2 e^{2x} + C_2 e^{3x} & x < 0 \end{cases}$$

$\square$

b) (3,5 Punkte) Es soll gelten:

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten dieser Fundamentallösung. Welche Standardbedingungen muss diese dabei erfüllen und warum?

U soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $U(x)$ soll beschränkt sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)f(\xi)d\xi$ existiert ($\widehat{=}$ der Vorgabe aus der Angabe)
  $\Rightarrow\ A_1 = B_1 = C_1 = 0.$

$LU(x)$ beinhaltet 3 Ableitungen von $U(x)$, wobei die letzte Ableitung deltaförmig sein muss. Deswegen muss die vorletze Ableitung von $U(x)$ eine Unstetigkeit der Größe 1 an der Stelle $x = 0$ aufweisen. Alle vorherigen Ableitungen und die Fundamentallösung selbst müssen folglich differenzierbar sein, damit diese Bedingung erfüllt sein kann.

- $U(x): \quad U(0_-) = U(0_+) \ \Rightarrow A_2 + B_2 + C_2 = 0.$
- $U'(x): \quad U'(0_-) = U'(0_+) \ \Rightarrow A_2 + 2B_2 + 3C_2 = 0.$
- $U''(x): \quad U''(0_+) - U''(0_-) = 1 \ \Rightarrow A_2 + 4B_2 + 9C_2 = -1.$

Löst man das Gleichungsystem, kommt man auf das folgende Ergebnis:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -\frac{1}{2}e^{x} + e^{2x} - \frac{1}{2}e^{3x} & x < 0 \end{cases}$$

c) (1,5 Punkte) Lösen Sie nun $Lu(x) = e^{-x}$.

$$u(x) = (U * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\, f(\xi) d\xi$$

$$U(x-\xi) = \begin{cases} 0 & x > \xi \\ -\frac{1}{2}e^{x-\xi} + e^{2(x-\xi)} - \frac{1}{2}e^{3(x-\xi)} & x < \xi \end{cases}$$

Da die Funktion $U(x-\xi)$ Stückweise definiert ist, teilen wir das Integral an der Stelle x auf

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} U_+(x-\xi)\, f(\xi) d\xi + \int_{x}^{\infty} U_-(x-\xi)\, f(\xi) d\xi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{x-\xi}e^{-\xi} d\xi + \int_x^{\infty} e^{2(x-\xi)}e^{-\xi} d\xi - \frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{3(x-\xi)}e^{-\xi} d\xi \\ &= \left(-\frac{e^x}{2}(\frac{e^{-2\xi}}{-2}) + e^{2x}(\frac{e^{-3\xi}}{-3}) - \frac{e^{3x}}{2}(\frac{e^{-4\xi}}{-4})\right)\Bigg|_x^{\infty} \\ &= -\frac{1}{24}e^{-x} \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei die Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{4^n}(2x - 7n)h(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für die Funktion $h(x)$ gilt:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-3, 3] \\ 0, & sonst \end{cases} .$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie zunächst, dass die Fouriertransmorierte $\widehat{f}_n(k)$ der Funktion $f_n(x)$ für ein fixes n existiert. Das heißt, zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx < \infty$ ist.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{4^n}(2x - 7n)h(x)|dx = \frac{1}{4^n}\int_{-3}^{3} |(2x - 7n)|dx$$

Da $x \in [-3, 3]$ und $n \geq 1 \Rightarrow 2x - 7n < 0 \Rightarrow |(2x - 7n)| = 7n - 2x$

$$\frac{1}{4^n}\int_{-3}^{3} 7n - 2xdx = \frac{1}{4^n}\left(7nx - x^2\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{4^n}(21n - 9 + 21n + 9) = \frac{1}{4^n}42n$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alternativ kann man $|f_n(x)|$ auch abschätzen.

$$|f_n(x)| = |\frac{1}{4^n}(2x - 7n)h(x)| = \frac{1}{4^n}|(2x - 7n)h(x)| \leq \frac{1}{4^n}(2|x| + 7n)h(x)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{4^n}(2x - 7n)h(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4^n}(2|x| + 7n)h(x)dx \\ &= \int_{-3}^{0} \frac{1}{4^n}(-2x + 7n)dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{4^n}(2x + 7n)dx \\ &= \frac{1}{4^n}\left((-x^2 + 7nx)\Big|_{-3}^{0} + (x^2 + 7nx)\Big|_{0}^{3}\right) \\ &= \frac{1}{4^n}(18 + 42n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f_n}(k)$ der Funktion $f_n(x)$ und schreiben Sie das Ergebnis mithilfe von Winkelfunktionen an.

$$\widehat{f_n}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{4^n}\int_{-3}^{3}(2x-7n)e^{-ikx}dx = \frac{1}{4^n}\int_{-3}^{3}2xe^{-ikx}dx - \frac{1}{4^n}\int_{-3}^{3}7ne^{-ikx}dx$$

$$\begin{aligned} I: \int_{-3}^{3} 2xe^{-ikx}dx &= -\frac{2x}{ik}\,e^{-ikx}\Big|_{-3}^{3} + \int \frac{2}{ik}e^{-ikx}dx = -\frac{6}{ik}e^{-3ik} - \frac{6}{ik}e^{3ik} + \frac{2}{k^2}\,e^{-ikx}\Big|_{-3}^{3} \\ &= \frac{12i}{k}\frac{1}{2}\left(e^{3ik}+e^{-3ik}\right) + \frac{2}{k^2}\left(e^{-3ik}-e^{3ik}\right) = \frac{12i}{k}\cos(3k) - \frac{4i}{k^2}\sin(3k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II: \int_{-3}^{3} 7ne^{-ikx}dx &= -\frac{7n}{ik}\,e^{-ikx}\Big|_{-3}^{3} = -\frac{7n}{ik}\left(e^{-3ik}-e^{3ik}\right) = \frac{14n}{k}\frac{1}{2i}\left(e^{3ik}-e^{-3ik}\right) \\ &= \frac{14n}{k}\sin(3k) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Endergebnis:

$$\widehat{f_n}(k) = \frac{1}{4^n}\left(\frac{12i}{k}\cos(3k) - \frac{4i}{k^2}\sin(3k) - \frac{14n}{k}\sin(3k)\right)$$

c) (1 Punkt) Für die Beantwortung der folgenden Fragen müssen Sie nichts rechnen sondern nur argumentieren.

1. Ist die Fouriertransformierte für ein festes n beschränkt im $\mathbb{R}$, also auch an der Stelle $k = 0$?
2. Wenn Sie die Frage 1. mit "Ja"beantwortet haben, was ist die Grenz-Fouriertransformierte für $n \to \infty$?

1. Ja, denn f ist absolut integrierbar. Das ist hinreichend dafür, dass ihre Fouriertransformierte in $\mathbb{R}$ beschränkt bleibt.
2. Die Grenz- Fouriertransformierte (eine Funktion in k) ist für $n \to \infty$ identisch Null.

- **Aufgabe 3.**

Der kleine Kugelfisch schwimmt durch die Tiefen des Ozeans nach Hause und ist schon ziemlich müde. Da gerät er plötzlich in ein Strömungsfeld, dessen Kraftkomponenten nur von den Ortskoordinaten abhängen. Helfen Sie ihm nach Hause zu kommen, indem sie den Weg geringsten Energieaufwands durch das Strömungsfeld zwischen den Punkten A und B finden. Da der kleine Kugelfisch ziemlich aufgeregt ist, ist er aufgeblasen und kugelrund, weswegen Sie Reibung direkt proportional seiner Geschwindigkeit berücksichtigen müssen. Da Sie ihm helfen, hilft der kleine Kugelfisch auch Ihnen und schwimmt immer in der selben Tiefe, bzw. bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, deren Betrag in x-Richtung konstant 1 ist, um es Ihnen leichter zu machen.

a) (1 Punkt) Leiten Sie den zu minimierenden Ausdruck für den Energieaufwand her. Ihr Ergebnis sollte von der Form

$$E_V = \int_{x_A}^{x_B} \Big[- F_{Sx}(x,y) - F_{Sy}(x,y)y'(x) + \rho(1 + y'(x)^2)\Big] dx$$

sein, mit der aufgewandten Energie E_V, den Strömungskraftkomponenten F_{Sx} und F_{Sy}, dem Reibungskoeffizienten ρ und der Bahnkurve $y(x)$.

$$dE = (\vec{F_S} + \vec{F_R}) \cdot d\vec{s}$$

Der Verbrauch ist die verlorene Energie, also $-dE$

$$\vec{F_R} = -\rho\vec{v} = -\rho\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \overset{\text{x-Param.}}{=} -\rho\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(x(t)) \\ y(x(t)) \end{pmatrix} = -\rho\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = -\rho \underbrace{v_x}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_R} \cdot d\vec{s} = -\rho \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} dx = -\rho(1 + y'^2)dx$$

$$-dE = -F_{Sx}(x,y)dx - F_{Sy}(x,y)y'(x)dx + \rho(1 + y'(x)^2)dx$$

$$E_V = \int_{x_A}^{x_B} \Big[- F_{Sx}(x,y)dx - F_{Sy}(x,y)y'(x)dx + \rho(1 + y'(x)^2)\Big] dx$$

b) (3 Punkte) Minimieren Sie das Integral in allgemeiner Form und geben Sie die entsprechende Euler-Lagrange- und Differentialgleichung an. Verwenden Sie **danach** die explizite Angaben des Strömungskraftfeldes, des Start- und Endpunktes, sowie des Proportionalitätsfaktors der Reibungskraft, um dem kleinen Kugelfisch seine bevorzugte Bahn auszurechnen.

$$-\vec{F}_S = \begin{pmatrix} 3y^2 - 2x^3y^2 \\ 2xy - x^4y \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ \rho = 32$$

Minimiere das Integral durch Variation von $y(x) \longrightarrow$ Euler-Lagrange Gleichung.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F_{Sx}}{\partial y} - \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} y' \ , \ \frac{\partial f}{\partial y'} = -F_{Sy} + 2\rho y'$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y' + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y'' \\ &= -\frac{\partial F_{Sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} y' + 2\rho y'' \end{aligned}$$

$$\overset{\text{E.L.}}{\Longrightarrow} -\frac{\partial F_{Sx}}{\partial y} - \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} y' = -\frac{\partial F_{Sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} y' + 2\rho y''$$

$$-\frac{\partial F_{Sx}}{\partial y} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial x} = 2\rho y''$$

Die Differentialgleichung ergibt sich durch Einsetzen zu

$$6y - 4x^3y - 2y + 4x^3y = 4y = 2\rho y'' \implies y'' = \frac{2}{\rho} y.$$

Wir verwenden den Standardlösungsansatz für Differentialgleichungen dieser Form.

$$y(x) = Ae^{\sqrt{\frac{2}{\rho}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{2}{\rho}}x}$$

Mit den Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} &0 = A + B \implies B = -A \\ &6 = A\left(e^{\sqrt{\frac{2}{\rho}}4} - e^{-\sqrt{\frac{2}{\rho}}4}\right) = A\left(e - \frac{1}{e}\right) \implies A = \frac{6e}{e^2-1} \approx 2,55 \end{aligned}$$

$$y(x) = 2,55\left(e^x - e^{-x}\right)$$

c) (1 Punkt) Welche Form hätte die Bahn minimaler Energie in einem konservativen Kraftfeld? Geben Sie auch eine physikalische Erklärung.
Hinweis: Denken Sie daran, wie sich jedes konservative Kraftfeld ganz allgemein über eine skalare Funktion darstellen lässt!

$$\vec{F}_S = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \\ \partial_y \Phi \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial F_{Sx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_{Sy}}{\partial x}$$

und damit

$$2\rho y'' = 0 \longrightarrow y(x) = ax + b$$

In konservativen Kraftfeldern ist die Arbeit wegunabhängig, also ist nur der Reibungsterm für die Minimierung relevant. Das bedeutet Folge der kürzesten Strecke zwischen zwei Punkten um ein Minimum an Energie zu benötigen, also einer Geraden.

d) (1 Punkt) Der kleine Kugelfisch findet sich kurz vor seinem zu Hause plötzlich in einer seltsamen Anomalie wieder, in der ein weiteres Strömungsfeld von seiner Geschwindigkeit abhängt.

$$-\vec{F_S} = \begin{pmatrix} 6y'^2y^5 \\ -6y'y^5 \end{pmatrix}$$

Helfen Sie dem kleinen Kugelfisch noch ein letztes Mal auch diese Hürde mit minimalem Energieaufwand zu meistern und vom Punkt $\tilde{A} = (0,0)$ nach $\tilde{B} = (6,9)$ zu kommen.
Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie bezüglich x dieses Kraftfelds und nutzen Sie dies um ein erstes Integral zu verwenden!

Das Energieintegral sieht gleich aus, wie unter Punkt a). Setzen wir nun in die E.L. Gleichung ein, müssen wir berücksichtigen, dass die Komponenten des Kraftfeldes von y' abhäng und wir zusätzliche Terme bekommen. Rechnen wir alles aus und setzen $\vec{F_S}$ ein, erhalten wir folgende Differentialgleichung.

$$\rho y'' = -30y'^2y^4$$

Diese ist alles andere als einfach zu lösen, also die Strategie die E.L. Gleichung direkt zu verwenden nicht die Beste. Allerdings ist das Kraftfeld symmetrisch (invariant) unter Translationen in x-Richtung. Damit hängt der Ausdruck im Integral nicht von x ab und wir können stattdessen ein erstes Integral der E.L. Gleichung verwenden.

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = const. \text{ mit } f \text{ dem Integranden}$$

$$\begin{aligned} y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = y'\left(-\frac{\partial F_{Sx}}{\partial y'} - \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y'}y' - F_{Sy} + 2\rho y'\right) + F_{Sx} + F_{Sy}y' - \rho - \rho y'^2 &= C_1 \\ -y'\frac{\partial F_{Sx}}{\partial y'} - y'^2\frac{\partial F_{Sy}}{\partial y'} + 2\rho y'^2 + F_{Sx} - \rho y'^2 &= C_1 + \rho \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$12y'^2y^5 - 6y'^2y^5 + 2\rho y'^2 - 6y'^2y^5 - \rho y'^2 = \rho y'^2 = C_1 + \rho$$

$$y' = \sqrt{\frac{C_1 + \rho}{\rho}} \implies y = \sqrt{\frac{C_1 + \rho}{\rho}}x + C_2$$

$$\tilde{A} : C_2 = 0 \;,\; \tilde{B} : 6\sqrt{\frac{C_1 + \rho}{\rho}} = 9 \implies C_1 = \frac{5}{4}\rho$$

$$y(x) = \frac{3}{2}x$$