Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH

2. Haupttest (Fr, 17.06.2022)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ◦

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei die Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n}(x - 6n)h(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für die Funktion $h(x)$ gilt:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-5, 5] \\ 0, & sonst \end{cases} .$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie zunächst, dass die Fouriertransmorierte $\widehat{f_n}(k)$ der Funktion $f_n(x)$ für ein fixes n existiert. Das heißt, zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx < \infty$ ist.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f_n}(k)$ der Funktion $f_n(x)$ und schreiben Sie das Ergebnis mithilfe von Winkelfunktionen an.

c) (1 Punkt) Für die Beantwortung der folgenden Fragen müssen Sie nichts rechnen sondern nur argumentieren.

1. Ist die Fouriertransformierte für ein festes n beschränkt im $\mathbb{R}$, also auch an der Stelle $k = 0$?
2. Wenn Sie die Frage 1. mit "Ja"beantwortet haben, was ist die Grenz-Fouriertransformierte für $n \to \infty$?

- **Aufgabe 2.**

Der kleine Kugelfisch schwimmt durch die Tiefen des Ozeans nach Hause und ist schon ziemlich müde. Da gerät er plötzlich in ein Strömungsfeld, dessen Kraftkomponenten nur von den Ortskoordinaten abhängen. Helfen Sie ihm nach Hause zu kommen, indem sie den Weg geringsten Energieaufwands durch das Strömungsfeld zwischen den Punkten A und B finden. Da der kleine Kugelfisch ziemlich aufgeregt ist, ist er aufgeblasen und kugelrund, weswegen Sie Reibung direkt proportional seiner Geschwindigkeit berücksichtigen müssen. Da Sie ihm helfen, hilft der kleine Kugelfisch auch Ihnen und schwimmt immer in der selben Tiefe, bzw. bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, deren Betrag in x-Richtung konstant 1 ist, um es Ihnen leichter zu machen.

a) (1 Punkt) Leiten Sie den zu minimierenden Ausdruck für den Energieaufwand her. Ihr Ergebnis sollte von der Form

$$E_V = \int_{x_A}^{x_B} \Big[- F_{Sx}(x,y) - F_{Sy}(x,y)y'(x) + \rho(1 + y'(x)^2)\Big] dx$$

sein, mit der aufgewandten Energie E_V, den Strömungskraftkomponenten F_{Sx} und F_{Sy}, dem Reibungskoeffizienten ρ und der Bahnkurve $y(x)$.

b) (3 Punkte) Minimieren Sie das Integral in allgemeiner Form und geben Sie die entsprechende Euler-Lagrange- und Differentialgleichung an. Verwenden Sie **danach** die explizite Angaben des Strömungskraftfeldes, des Start- und Endpunktes, sowie des Proportionalitätsfaktors der Reibungskraft, um dem kleinen Kugelfisch seine bevorzugte Bahn auszurechnen.

$$-\vec{F}_S = \begin{pmatrix} 3yx^2 + 3y^2 \\ 3xy + x^3 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \ , \ \rho = 24$$

c) (1 Punkt) Welche Form hätte die Bahn minimaler Energie in einem konservativen Kraftfeld? Geben Sie auch eine physikalische Erklärung.
Hinweis: Denken Sie daran, wie sich jedes konservative Kraftfeld ganz allgemein über eine skalare Funktion darstellen lässt!

d) (1 Punkt) Der kleine Kugelfisch findet sich kurz vor seinem zu Hause plötzlich in einer seltsamen Anomalie wieder, in der ein weiteres Strömungsfeld von seiner Geschwindigkeit abhängt.

$$-\vec{F}_S = \begin{pmatrix} y'^2 y^2 \\ -y' y^2 \end{pmatrix}$$

Helfen Sie dem kleinen Kugelfisch noch ein letztes Mal auch diese Hürde mit minimalem Energieaufwand zu meistern und vom Punkt $\tilde{A} = (0, 0)$ nach $\tilde{B} = (3, 6)$ zu kommen.
Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie bezüglich x dieses Kraftfelds und nutzen Sie dies um ein erstes Integral zu verwenden!

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei der Differentialoperator L mit

$$Lu(x) = u'''(x) - 4u''(x) + u'(x) + 6u(x).$$

a) (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass eine Fundamentallösung $U(x)$ der obigen Differentialgleichung die Form

$$U(x) = \begin{cases} A_1 e^{-x} + B_1 e^{2x} + C_1 e^{3x} & x > 0 \\ A_2 e^{-x} + B_2 e^{2x} + C_2 e^{3x} & x < 0 \end{cases}$$

haben muss.

b) (3,5 Punkte) Es soll gelten:

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten dieser Fundamentallösung. Welche Standardbedingungen muss diese dabei erfüllen und warum?

c) (1,5 Punkte) Lösen Sie nun $Lu(x) = e^x$.