Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Nachtest (DI, 5.7.2022) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Der Differentialoperator L ist definiert durch

$$Lu(x) = u''(x) - 4u'(x) - 5u(x).$$

a) (2 Punkte) Konstruieren Sie zuerst einen Ansatz für die Fundamentallösung $U(x)$

$$LU(x) = \delta(x).$$

Ansatz für $x \neq 0$: $U = Ae^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} LU = (\lambda^2 - 4\lambda - 5)U = 0 &\implies \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5 \end{aligned}$$

Wir setzen die Fundamentallösung wegen der Deltafunktion stückweise auf der reellen Achse als Linearkombination aller Lösungen an:

$$U(x) = \begin{cases} A_1 e^{-x} + B_1 e^{5x}, & x < 0 \\ A_2 e^{-x} + B_2 e^{5x}, & x > 0 \end{cases}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten der Fundamentallösung. Berücksichtigen Sie dabei die Bedingungen

$$\lim_{x\to-\infty} U(x) = \lim_{x\to\infty} U(x) = 0.$$

Die zweithöchste (in L vorkommende) Ableitung (U') muss am Ursprung einen Sprung der Höhe 1 haben, damit die letzte (U'') proportional zu einer Deltafunktion sein kann. Damit diese definiert sind, muss U natürlich auch stetig sein. Dies liefert uns genau so viele Gleichungen, wie wir zum eindeutigen Bestimmen der Fundamentallösung brauchen.

I. $\lim_{x\to-\infty} U(x) = 0 \implies A_1 = 0$

II. $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0 \implies B_2 = 0$

III. $U(0^+) = U(0^-) \implies A_2 + B_2 = A_1 + B_1$

IV. $U'(0^+) = U'(0^-) + 1 \implies -A_2 + 5B_2 = -A_1 + 5B_1 + 1$

$$\implies U(x) = \begin{cases} U_- = -\frac{1}{6}e^{5x}, & x < 0 \\ U_+ = -\frac{1}{6}e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der inhomogenen Gleichung $Lu(x) = \sin x$ durch Faltung mit der Fundamentallösung.
Hinweis:

$$\int e^{\alpha x} \sin x dx = e^{\alpha x} \frac{\alpha \sin x - \cos x}{\alpha^2 + 1} + c$$

$$\begin{aligned}
u(x) = (U * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi) f(\xi) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{x} U_+(x-\xi) f(\xi) d\xi + \int_{x}^{\infty} U_-(x-\xi) f(\xi) d\xi \\
&= -\frac{1}{6} e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{\xi} \sin \xi d\xi - \frac{1}{6} e^{5x} \int_{x}^{\infty} e^{-5\xi} \sin \xi d\xi \\
&= -\frac{\sin x - \cos x}{6 \cdot 2} + \frac{-5 \sin x - \cos x}{6 \cdot 26} = \frac{1}{26}(2 \cos x - 3 \sin x)
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

  (6 Punkte) Finden Sie diejenige Funktion $y(x)$, für welche das Integral

$$I[y] = \int_0^1 f(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left((2x - y')^2 + 4y\cos x\right)\,\mathrm{d}x$$

  extremal wird. Es soll die Nebenbedingung

$$\varphi[y] = \int_0^1 g(x, y, y')\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} + 2\sin 1 = \int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} + 2\sin 1 = 0$$

  und die Randbedingungen $y(0) = -2$ und $y(1) = 1 - 2\cos 1$ erfüllt sein.
  Hinweis: Setzen Sie für die Partikulärlösung der Euler-Lagrange Gleichung

$$y_p(x) = a\sin x + b\cos x + cx^2,\ a, b, c, \in \mathbb{R}$$

  an, oder integrieren Sie zwei mal.

Wir bilden $h(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')$ und wenden die Euler-Lagrange Gleichung auf h an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}\ .$$

Man erhält nach Durchführung der Differentiationen

$$y'' = 2\cos x + \frac{\lambda}{2} + 2.$$

Wir integrieren zwei mal und erhalten

$$y'(x) = 2\sin x + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)x + D$$

und

$$y(x) = -2\cos x + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)\frac{x^2}{2} + Dx + C.$$

Aus den Randbedingungen folgt $y(0) = -2 + C = -2$, d.h., $C = 0$ und

$$y(1) = -2\cos 1 + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)\frac{1}{2} + D = 1 - 2\cos 1,$$

d.h., $D = -\frac{\lambda}{4}$. Die gesuchte Lösung lautet daher

$$y(x) = -2\cos x + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)\frac{x^2}{2} - \frac{\lambda}{4}x$$

und aus der Nebenbedingung ergibt sich

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = -2\sin 1 + \left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)\frac{1}{6} - \frac{\lambda}{8} = -2\sin 1 + \frac{1}{3}.$$

Damit folgt $\lambda = 0$ und $y(x) = -2\cos x + x^2$.

- **Aufgabe 3.**

a) (3 Punkte) Gegeben sei eine Fläche mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u + \frac{v}{2} \\ 2\cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \\ 2\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Auf dieser Fläche ist eine Kurve, parametrisiert durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}\sin^3(4t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{5\pi}{2}$$

gegeben. Berechnen Sie die Länge der Kurve auf der Fläche.
Hinweis: Berechnen Sie das Wegelement direkt über die Veränderung des Ortsvektors und nicht über den Maßtensor um sich Arbeit zu ersparen.
Finden sie erst einen Ausdruck für das Wegelement ds und setzen Sie danach die Ausdrücke für $u(t)$ und $v(t)$ ein.
Es könnte Ihnen folgendes Integral begegnen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax)\cos(ax) = \frac{\sin^3(ax)}{3a}$$

Wir benötigen das Wegelement ds und daher die Ableitung des Ortsvektors entlang der Kurve auf der Fläche $\vec{r}(u(t), v(t))$ nach dem Kurvenparameter.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \end{pmatrix} v' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v'}{2} \\ -\left(1 + \frac{v'}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \\ \left(1 + \frac{v'}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^2 &= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 1 + \left(\frac{v'}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{v'}{2}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right)\right) \\ &= 2\left(1 + \frac{v'}{2}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \implies ds = \sqrt{2}\left(1 + \frac{v'}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Die Länge der Kurve erhalten wir durch

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt$$

Die Länge der Kurve ist daher

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \frac{v'}{2}\right) dt = \sqrt{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \frac{4}{2}\sin^2(4t)\cos(4t)\right) dt \\ &= \sqrt{2}(t_2 - t_1) + \sqrt{2}\left(\frac{\sin^3(4t)}{6}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \\ &= \sqrt{2}\frac{5\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\sin^3(10\pi) - \sin^3(0)\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}\pi \end{aligned}$$

Wobei wir den Hinweis zur Lösung des Integrals benutzt haben.

Für Interessierte,
da solche Integrale in höheren Semestern immer wieder per Hand gelöst werden müssen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax)\cos(ax)dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin(ax) \\ du = a\cos(ax)dx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} u^2\,du$$

$$= \left.\frac{u^3}{3a}\right|_{x_1}^{x_2} = \left.\frac{\sin^3(ax)}{3a}\right|_{x_1}^{x_2}$$

b) (3 Punkte) Betrachten Sie folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Vektorfeldes durch die obere Hälfte der Kugeloberfläche um den Ursprung mit Radius R.
Hinweis: Die Parameterdarstellung der Kugeloberfäche lautet

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ R\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ R\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Es könnte Ihnen folgendes Integral begegnen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

Wir benötigen den Flächennormalvektor.

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{d\vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ R\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -R\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ R\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Wir haben dabei die Orientierung nach Außen als positiv angenommen.

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{n} \; d\vartheta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Big(-3\sin^2(\vartheta)\cos(\varphi) + \sin^2(\vartheta)\sin(\varphi) + 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \Big) d\vartheta d\varphi \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Big(\sin^2(\vartheta)\big(-3\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) + \sin(2\vartheta) \Big) d\vartheta d\varphi \\
&= R^2 \frac{1}{2}\big(\vartheta - \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \big(-3\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) d\varphi - \pi R^2 \cos(2\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{R^2\pi}{4} \underbrace{\big(-3\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + 2\pi R^2 \\
&= 2\pi R^2
\end{aligned}$$

Wobei wir das Integral aus dem Hinweis benutzt haben.

Für Interessierte,
da solche Integrale in höheren Semestern immer wieder per Hand gelöst werden müssen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax)dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sin(ax)}_{u}\underbrace{\sin(ax)}_{v'}dx \quad \text{...partielle Integration...}$$

$$= -\frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \cos^2(ax)dx$$

$$= -\frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} 1 - \sin^2(ax)dx$$

$$2\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax)dx = \left(x - \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$