

Differentialgleichungen 2, 1. Übung 22. 10.2009

1. Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Phasenporträt der skalaren DG $\dot{x} = f(x)$ festlegen. Zeigen Sie insbesondere, dass jede nichtkonstante Lösung für $t \rightarrow \pm\infty$ entweder gegen eine Ruhelage oder gegen $\pm\infty$ konvergiert.

2. Gegeben sei die DG

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos x \\ \dot{y} &= \sin y\end{aligned}$$

im \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie alle Ruhelagen. Zeigen Sie, dass alle Lösungen komplett sind und skizzieren Sie das Phasenporträt.

3. Sei $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Eine DG der Form

$$\begin{aligned}\dot{q} &= H_p(p, q) \\ \dot{p} &= -H_q(p, q)\end{aligned}$$

heißt **Hamiltonsches System**.

- a) Zeigen Sie, dass die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -gradU(q)\end{aligned}$$

mit einer glatten Potentialfunktion $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Hamiltonsches System sind.

- b) Zeigen Sie, dass ein Hamiltonsches System volumenerhaltend ist.
- c) Bestimmen Sie alle linearen Hamiltonschen Systeme mit konstanten Koeffizienten.

4. Exercise 1.17 im Buch von Chicone
5. Exercise 1.16 im Buch von Chicone
6. Exercise 1.18 im Buch von Chicone