

Differentialgleichungen 2, 2. Übung 29. 10.2009

1. Exercise 1.18 im Buch von Chicone. Bestimmen Sie immer auch die Linearisierung und den Typ der auftretenden Ruhelagen. Zeichnen Sie die verschiedenen Phasenporträts des nichtlinearen Systems, die auftreten.
2. Exercise 1.22 im Buch von Chicone
3. Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - x - y) \\ \dot{y} &= y(3 - 2x - y)\end{aligned}$$

beschreibt zwei Populationen, die in Wettbewerb stehen.

- a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen
 - b) Gibt es invariante Geraden?
 - c) Bestimmen Sie die Linearisierung an allen Ruhelagen und klassifizieren Sie die entsprechenden linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten.
 - d) Nehmen Sie an, dass das Phasenporträt des nichtlinearen Systems in der Nähe der Ruhelagen qualitativ dem Phasenporträt der jeweiligen Linearisierung gleicht. Skizzieren Sie unter dieser Annahme das Phasenporträt.
4. In Polarkoordinaten wird eine DG durch

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r - r^3 \\ \dot{\vartheta} &= \sin^2(\vartheta/2)\end{aligned}$$

beschrieben. Wie verhalten sich die Lösungen in (x, y) Koordinaten. Dabei genügt es $r \geq 0$ und $\vartheta \in [0, 2\pi]$ zu betrachten, wobei 0 mit 2π identifiziert wird. Zeigen Sie insbesondere, dass alle Lösungen mit $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Ruhelage $(1, 0)$ konvergieren, dass aber die Ruhelage $(1, 0)$ dennoch nicht Ljapunov-stabil ist.

5. Gegeben ist die skalare DG $\dot{x} = f(x)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = a$, $a \neq 0$. f sei glatt. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung U von Null eine glatte Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$ existiert, so dass durch die Koordinatentransformation $x = h(y)$ die DG in die Form $\dot{y} = ay$ gebracht wird, d.h. die DG wird durch eine nichtlineare Koordinatentransformation exakt linearisiert.

Hinweis: Setzen Sie h in der Form $h(y) = y + p(y)$ mit $p(0) = p'(0) = 0$ an und leiten Sie eine DG für $p(y)$ her.

Zusatzfrage: welche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen braucht man tatsächlich?