Differentialgleichungen 2, 6. Übung 3. 12.2009

1. Anstelle eines (homogenen) blow-ups

   $$x = r\cos\Theta, \qquad y = r\sin\Theta$$

   ist manchmal ein gewichteter blow-up

   $$x = r^l\cos\Theta, \qquad y = r^m\sin\Theta$$

   mit $m, l \in \mathbb{N}$ vorteilhafter.

   Untersuchen Sie das Verhalten der Differentialgleichung

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= y + O(2) \\ \dot{y} &= x^2 + O(xy, y^2, y^3) \end{aligned}$$

   in der Nähe des Ursprungs mit Hilfe des blow-ups

   $$x = r^2\cos\Theta, \qquad y = r^3\sin\Theta$$

2. Benützen Sie in Bsp. 1 statt Θ als Koordinate für S^1 die Karten K_i $i = 1, 2, 3, 4$, die den Tangenten an den Kreis in den Punkten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ entsprechen. In K_1 hat die blow-up Transformation die Form

   $$x = r^2, y = r^3 y_1,$$

   in K_2 hat die blow-up Transformation die Form

   $$x = r^2 x_2, y = r^3,$$

   usw. In diesen Koordinaten sind die Rechnungen viel einfacher.

3. Bestimmen Sie das Phasenporträt der Poincaré Kompaktifizierung der Differentialgleichung

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x \\ \dot{y} &= -\mu y \end{aligned}$$

   mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $0 < \lambda < \mu$.

4. Bestimmen und Klassifizieren Sie die Phasenporträts der Poincaré Kompaktifizierung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2 + x^2 + 4y^2 \\ \dot{y} &= 10xy + \mu \end{aligned}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit vom Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Achten Sie insbesondere auf die Verzweigung, die bei $\mu = 0$ auftritt.

5. Sei

$$\dot{x} = Ax$$

eine lineare DG mit konstanten Koeffizienten im $\mathbb{R}^n$. Für $x \neq 0$ sei $y = x / \parallel x \parallel$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für y her und zeigen Sie, dass die Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ unter dieser Differentialgleichung invariant ist. Bestimmen Sie die Ruhelagen der Differentialgleichung für y.