

Differentialgleichungen 2, 7. Übung 17. 12.2009

1. Exercise 1.158 im Buch von Chicone
2. Exercise 1.149 a),b), c) im Buch von Chicone
3. Bestimmen Sie alle periodischen, heteroklinen und homoklinen Orbits der Differentialgleichungen

a)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^3\end{aligned}$$

4. Beweisen Sie:
 - a) ω - Grenzmengen sind abgeschlossen.
 - b) Sei $\Gamma^+(p)$ beschränkt. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, p), \omega(p)) = 0.$$

5. Bestimmen Sie die α - und ω -Grenzmengen der folgenden Systeme. Skizzieren Sie jeweils die Phasenporträts in (x, y) -Koordinaten.
 - a) $\dot{r} = r - r^2, \dot{\theta} = 1$
 - b) $\dot{r} = r^3 - r^2 + 2r, \dot{\theta} = 1$
 - c) $\dot{r} = \sin r, \dot{\theta} = -1$
 - d) $\dot{r} = r(r^2 - 2r + 1 - \mu), \dot{\theta} = 1, \mu \in \mathbb{R}$.

Welche Verzweigungen treten in d) auf?

6. Eine DG $\dot{x} = f(x)$ ist ein Gradientensystem, wenn gilt $f(x) = -\text{grad} V(x)$ mit einer glatten Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 - a) Zeigen Sie, dass die Funktion V entlang der nicht-konstanten Lösungen der DG abnimmt.

b) Zeigen Sie, dass ein Gradientensystem keine periodischen Lösungen hat.

c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin x \sin y \\ \dot{y} &= -\cos x \cos y\end{aligned}$$

ein Gradientensystem ist. Bestimmen Sie das Phasenporträt und insbesondere alle Grenzmengen des Systems.