Differentialgleichungen 2, 8. Übung   14. 1.2010

1. Bestimmen Sie die α- und ω-Grenzmengen der folgenden Systeme. Skizzieren Sie jeweils die Phasenporträts in (x, y)-Koordinaten.

   a) $\dot{r} = r - r^2$, $\dot{\Theta} = 1$

   b) $\dot{r} = r^3 - r^2 + 2r$, $\dot{\Theta} = 1$

   c) $\dot{r} = \sin r$, $\dot{\Theta} = -1$

   d) $\dot{r} = r(r^2 - 2r + 1 - \mu)$, $\dot{\Theta} = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$.

   Welche Verzweigungen treten in d) auf?

2. Eine DG $\dot{x} = f(x)$ ist ein Gradientesystem, wenn gilt $f(x) = -grad\, V(x)$ mit einer glatten Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass die Funktion V entlang der nicht-konstanten Lösungen der DG abnimmt.

   b) Zeigen Sie, dass ein Gradientensystem keine periodischen Lösungen hat.

   c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin x \sin y \\ \dot{y} &= -\cos x \cos y \end{aligned}$$

   ein Gradientensystem ist. Bestimmen Sie das Phasenporträt und insbesondere alle Grenzmengen des Systems.

3. Exercise 1.201 im Buch von Chicone

4. Bestimmen Sie das Phasenportät und insbesondere alle ω-Grenzmengen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin x(-\tfrac{1}{10}\cos x - \cos y) \\ \dot{y} &= \sin y(\cos x - \tfrac{1}{10}\cos y) \end{aligned}$$

   im Bereich $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

5. Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x - \tfrac{4xy}{1+x^2}\\ \dot{y} &= bx(1 - \tfrac{y}{1+x^2})\end{aligned}$$

mit $x, y \geq 0$ und $a, b > 0$ ist ein vereinfachtes Modell der Belousov-Zhabotinsky-Reaktion.

Bestimmen Sie Bedingungen an a, b, die die Existenz eines periodischen Orbits garantieren.

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Bereich $B := [0, r] \times [0, s]$ für geeignete Werte von r und s positiv invariant ist und eine Ruhelage enthält. Wenn diese Ruhelage abstoßend ist, folgt aus dem Satz von Poincare Bendixson die Existenz eines Grenzzyklus.