Differentialgleichungen 2, 2. Übung   23. 10. 2012

1. Gegeben sei die DG
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos x\\ \dot{y} &= \sin y\end{aligned}$$
im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Ruhelagen. Zeigen Sie, dass alle Lösungen für $t \in \mathbb{R}$ existieren und skizzieren Sie das Phasenporträt.

   Zusatzfrage: kann man auch die DG
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos y\\ \dot{y} &= \sin x\end{aligned}$$
"lösen" bzw. ihre Phasenporträt verstehen?

2. Es sei
$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x,y)\\ \dot{y} &= Q(x,y)\end{aligned}$$
eine ebenes C^1-Vektorfeld mit einer Ruhelage (x_0, y_0). An der Ruhelage gelte $P_y \neq 0$ und $Q_y \neq 0$.

   Untersuchen sie welcher Verlauf der Nullklinen und welche Vorzeichenwechsel von P bzw. Q implizieren, dass die Ruhelage (für die Linearisierung) ein Sattelpunkt ist.

3. Welchen Effekt hat die Variation von $D \in \mathbb{R}^+$ in der skalierten Lotka-Volterra Gleichung (und in anderen Vektorfeldern mit einem Faktor D in einer Komponente des Vektorfeldes) ? Analysieren sie insbesondere das Verhalten des Vektorfeldes für $D \ll 1$ und $D \gg 1$.

   Bemerkung: Für $D \ll 1$ variiert y sehr langsam im Vergleich zu x, für $D \gg 1$ variiert y sehr schnell im Vergleich zu x. Was bewirkt in diesen Fällen die Umskalierung der Zeit $\tau = Dt$, wobei τ die neue Variable ist?

4. Bestimmen Sie das Phasenporträt des mathematischen Pendels
$$\begin{aligned}\dot{x} &= p\\ \dot{p} &= -\sin x.\end{aligned}$$

Hinweis: Die Lösungskurven liegen auf den Niveaulinien der Hamiltonfunktion

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2} - \cos x.$$

Analysieren sie insbesondere den Verlauf der Separatrizen.