Differentialgleichungen 2, 3. Übung   6. 11. 2012

1. Meiss, Seite 68, Bsp. 10 a), c), e), g)
2. Meiss, Seite 69, Bsp. 16
3. Meiss, Seite 70, Bsp. 20
4. Sei

$$\dot{x} = A(t)x$$

   eine T-periodische Differentialgleichung.

   a) Zeigen Sie, dass mit $\Phi(t)$ auch $\Phi(t+T)$ eine Fundamentalmatrix ist.
   b) Zeigen Sie, dass für die Übergangsmatrix $\Phi(t,s)$ gilt

$$\Phi(t+T, s+T) = \Phi(t,s).$$

   c) Zeigen Sie, dass die Floquetmultiplikatoren wohldefiniert sind, d.h. dass sie nicht von der Wahl von $\Phi(t)$ abhängen.

5. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0$$

   beschreibt die Bewegung eines Pendels, dessen Aufhängung kleine periodische vertikale Oszillationen ausführt. Dabei entspricht $\varepsilon \ll 1$ der Amplitude der Oszillationen der Aufhängung, ω_0 ist die Kreisfrequenz des ungestörten Pendels und ω ist die Kreisfrequenz der Schwingung der Aufhängung.

   Zeigen Sie, dass für

$$\omega \neq \frac{2\omega_0}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

   die Ruhelage $x = 0$ für hinreichend kleine Werte von ε stabil ist.

   Hinweis: Schreiben Sie die Geichung als periodisches lineares System mit Periode $T = 2\pi/\omega$. Die Monodromiematrix M dieses Systems ist eine glatte Funktion von ω und ε. Berechnen Sie die Monodromiematrix M für $\varepsilon = 0$. Aus $|spur(M)| < 2$ folgt die Stabilität für $\varepsilon = 0$ und auch für $|\varepsilon| \ll 1$.

   Bemerkung: Im Fall

$$\omega = \frac{2\omega_0}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

spricht man von parametrischer Resonanz, die bereits für beliebig kleine Werte von ε zu Instabilität führen kann.