Differentialgleichungen 2, 4. Übung   20. 11. 2012

1. Gegeben ist die DG
$$\dot{x} = x^2.$$
Sei $x(t, a)$ die Lösung des AWP $x(0) = a$. Berechnen Sie $\frac{\partial x}{\partial a}(t, 1)$ auf zwei Arten:

   a) durch explizites Berechnen von $x(t, a)$

   b) durch Lösen der entlang von $x(t, 1)$ linearisierten DG.

2. Gegeben ist die DG
$$\dot{x} = 1 - x + \varepsilon x^2.$$
Für $\varepsilon = 0$ hat die DG die stabile Ruhelage $x = 1$.

   a) Zeigen Sie, dass die DG für kleine positive Werte von ε ebenfalls eine stabile Ruhelage nahe bei $x = 1$ besitzt.

   b) Berechnen Sie die ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung
$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots.$$
der Lösung.

   c) Gibt diese Entwicklung in der Nähe von $x = 1$ das Verhalten der exakten Lösung für $t \to \infty$ korrekt wieder?

3. Gegeben ist das AWP
$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$$
Berechnen Sie die ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung
$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots.$$
der Lösung. Gibt diese Entwicklung das Verhalten der exakten Lösung richtig wieder?

4. Ein Pendel mit periodisch oszillierender Aufhängung wird durch die DG

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon \cos t)x = 0$$

beschrieben. Für $\omega \approx k/2$, $k \in \mathbb{N}$ kann für kleine Werte von ε Instabilität auftreten (siehe 3. Übung, Bsp. 5).

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der DG in der Nähe von $k = 1$ und $\varepsilon = 0$ mittels Störungsrechnung und relevanter Literatur. Wie kann man bei $k = 2, 3, \ldots$ vorgehen?