Differentialgleichungen 2, 5. Übung   27. 11. 2012

1. Sei $f(x)$ ein C^1 Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine skalare C^1 Funktion mit $g(x) > 0$. Betrachte

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

mit Lösungen $x(t)$ und

$$x' = f(x)g(x) \tag{2}$$

mit Lösungen $x(\tau)$. Zeigen Sie, dass die DG (1) und (2) dieselben Orbits und somit dasselbe Phasenporträt haben. Lösungen der DG (2) sind umparametrisierte Lösungen der DG (1).

Hinweis: Sei $x(t)$ Lösung des AWP $x(0) = x_0$. Dann definiert

$$\tau(t) := \int_0^t \frac{1}{g(x(s))} ds$$

den entsprechenden Parameterwechsel.

2. Benützen Sie Bsp. 1, um die Phasenportäts der folgenden Systeme zu bestimmen. Achten Sie dabei auf Änderungen, die durch Vorzeichenwechsel der Funktion $g(x)$ entstehen.

a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= 3y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -xy \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= 3y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Untersuchen Sie auch die Stabilität der auftretenden Ruhelagen.

3. Zeigen Sie, dass die Orbits eines Gradientensystems $\dot{x} = -\nabla F(x)$ orthogonal zu den Niveaumengen der Potentialfunktion $F(x)$ verlaufen. Zeigen Sie, dass nicht-degenerierte Minima, Maxima und Sattelpunkte von F jeweils Senken, Quellen und Sattelpunkten des Gradientensystems entsprechen. (Ein Extremum von F ist nicht-degeneriert, wenn die Hessematrix von F dort regulär ist.)

   Benützen Sie dies, um das Phasenporträt der folgenden Systeme zu bestimmen.

   a)
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= -4x^3 + 2x \\ \dot{y} &= -2y \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x^3 - 2x \\ \dot{y} &= -2y \end{aligned}$$

4. Meiss, Seite 161, Bsp. 8

5. Die Lorenz Gleichungen sind

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

   mit positiven Parametern σ, r, b.

   a) Bestimmen Sie die Ruhelagen in Abhängigkeit von den Parametern.

   b) untersuchen Sie die Stabilität des Ursprungs in Abhängigkeit von r.

   c) Zeigen Sie unter Verwendung einer quadratischen Ljapunov Funktion, dass der Ursprung für $0 < r \leq 1$ global anziehend ist.