Differentialgleichungen 2, 6. Übung   4. 12. 2012

1. Untersuchen Sie für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ die DG

   $$\dot{x} = ax \qquad \text{und} \qquad \dot{x} = bx$$

   topologisch konjugiert sind. Falls möglich geben Sie einen passenden Homeomorphismus h an. Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit bzw. Hölderstetigkeit von h.

2. Zeigen Sie, dass die Flüsse $\varphi_t(x) = e^{tA}x$ und ${}_t(y) = e^{tA}y$ genau dann C^1 konjugiert sind, wenn die Matrizen A und B ähnlich sind.

3. Meiss, Seite 161, Bsp. 7

4. Gegeben ist die skalare DG $\dot{x} = f(x)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = a$, $a \neq 0$. f sei glatt. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung U von Null eine glatte Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$ existiert, so dass durch die Koordinatentransformation $x = h(y)$ die DG in die Form $\dot{y} = ay$ gebracht wird, d.h. die DG wird durch eine nichtlineare Koordinatentransformation exakt linearisiert.

   Hinweis: Setzen Sie h in der Form $h(y) = y + p(y)$ mit $p(0) = p'(0) = 0$ an und leiten Sie eine DG für $p(y)$ her.

5. Gegeben ist eine Differentialgleichung der Form

   $$\dot{x} = f(x)$$

   mit $x \in \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld sei glatt und erfülle $f(0) = 0$. Daher gilt

   $$f(x) = Ax + f_2(x) + f_3(x) + \cdots,$$

   dabei ist A die Matrix der Linearisierung an $x = 0$. Die Terme $f_k(x)$ sind die Terme der Ordnung k in der Taylorentwicklung von $f(x)$.

   Nach dem Satz von Hartman-Grobman ist der Fluss der nichtlinearen DG zum Fluss der Linearisierung $\dot{y} = Ay$ topologisch konjugiert. Es stellt sich die Frage, ob die Konjugation mittels einer differenzierbaren Koordinatentransformation $x = h(y)$ mit $h(y) = y + p(y)$, $p(0) = 0$ und $dp(0) = 0$ erreicht werden kann?

Versuchen Sie für die folgenden Vektorfelder die quadratischen Terme in der Taylorreihe mittels einer "near identity transformation" der Form

$$x = y + p_2(y)$$

zu eliminieren, wobei $p_2(y)$ rein quadratisch ist. Zeigen Sie, dass dabei neue Terme mit Ordnung größer gleich drei entstehen können.

a) $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

c) $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Was lernt man aus diesen Beispielen? Können Sie eine Systematik erkennen?