Differentialgleichungen 2, 7. Übung 11. 12. 2012

1. Beweisen Sie, dass gilt
$$\omega(x_0) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_+(\varphi_t(x_0))}$$
und
$$\alpha(x_0) = \bigcap_{t\leq 0} \overline{\gamma_-(\varphi_t(x_0))}.$$

2. Bestimmen Sie die α- und ω-Grenzmengen der folgenden Systeme. Skizzieren Sie jeweils die Phasenporträts in (x, y)-Koordinaten.

   a) $\dot{r} = r - r^2$, $\dot{\Theta} = 1$

   b) $\dot{r} = r^3 - r^2 + 2r$, $\dot{\Theta} = 1$

   c) $\dot{r} = \sin r$, $\dot{\Theta} = -1$

   d) $\dot{r} = r(r^2 - 2r + 1 - \mu)$, $\dot{\Theta} = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$.

   Welche Verzweigungen treten in d) auf?

3. Zeigen Sie, dass die α- und ω-Grenzmengen eines Gradientensystem aus Ruhelagen bestehen.

   Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sin x \sin y \\ \dot{y} &= \cos x \cos y \end{aligned}$$
   ein Gradientensystem ist. Bestimmen Sie das Phasenporträt und insbesondere alle α- und ω-Grenzmengen des Systems.

4. Bestimmen Sie das Phasenportät und insbesondere alle ω-Grenzmengen der Differentialgleichung
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin x(-\tfrac{1}{10}\cos x - \cos y) \\ \dot{y} &= \sin y(\cos x - \tfrac{1}{10}\cos y) \end{aligned}$$
   im Bereich $[0, \pi] \times [0, \pi]$.