Differentialgleichungen 2, 8. Übung 15. 1. 2013

1. Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x - \tfrac{4xy}{1+x^2}\\ \dot{y} &= bx(1 - \tfrac{y}{1+x^2})\end{aligned}$$

   mit $x, y \geq 0$ und $a, b > 0$ ist ein vereinfachtes Modell der Belousov-Zhabotinsky-Reaktion.

   Bestimmen Sie Bedingungen an a, b, die die Existenz eines periodischen Orbits garantieren.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass der Bereich $B := [0, r] \times [0, s]$ für geeignete Werte von r und s positiv invariant ist und eine Ruhelage enthält. Wenn diese Ruhelage abstoßend ist, folgt aus dem Satz von Poincare Bendixson die Existenz eines Grenzzyklus.

2. Gegeben ist die DG

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x + 4x^3 - \varepsilon y.\end{aligned}$$

   Untersuchen Sie die Ruhelagen und ihre stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten für a) $\varepsilon = 0$ und b) $0 < \varepsilon << 1$. Zeichen Sie jeweils das Phasenporträt.

3. Meiss Seite 193, Bsp. 3

4. Meiss Seite 193, Bsp. 5

5. Bestimmen Sie die stabile und instabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage $x = 0$ der DG

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2\\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2.\end{aligned}$$