

Besprechungstermin: 19.3.

13. März 2018

Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 1

Aufgabe 1:

Sphärische, harmonische Funktionen der Ordnung n sind Einschränkungen von homogenen ($p(\alpha x) = \alpha^n p(x)$), harmonischen ($\Delta p = 0$) Polynomen vom Grade n auf die Einheitssphäre.

a) Zeigen Sie: Es existieren in \mathbb{R}^3 genau $2n + 1$ linear unabhängige sphärische harmonische Funktionen der Ordnung n . *Hinweis:* Leiten Sie aus $H_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k}(x_1, x_2)x_3^k$ eine Rekursionsformel für die homogenen Polynome α_k her.

b) In Kugelkoordinaten gilt für homogene Polynome $H_n(r, \hat{x}) = r^n Y_n(\hat{x})$. Zeigen Sie, dass die sphärischen harmonischen Funktionen Y_n Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators der Einheitssphäre sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel, dass

$$\int_{\Omega} Y_n \overline{Y_m} d\hat{x} = 0, \quad n \neq m, \quad (1)$$

mit $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$.

d) Formulieren Sie die Aussagen aus (a) und (b) für den \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 2:

Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $A : D(A) \rightarrow H$ der Multiplikationsoperator auf H , d.h. für $f \in D(A) := \{f \mid Af \in H\}$ ist

$$(Af) : x \mapsto xf(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Resolventenmenge und das Spektrum von A . Gibt es Eigenwerte von A ?

Aufgabe 3:

Sei $p(x) = p_1 > 0$ auf $[0, 1)$ und $p(x) = p_2 > 0$ auf $(1, 2]$. Geben Sie die Eigenpaare $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1((0, 2)) \setminus \{0\}$ von

$$\int_0^2 u'v' dx = \lambda \int_0^2 p u v dx$$

mit Hilfe der Nullstellen einer skalaren Funktion an.

Aufgabe 4:

Sie bekommen im TISS ein python-Skript zur Verfügung gestellt. Installieren Sie die benötigten Programme (ngsolve z.B. über <https://ngsolve.org/downloads>) und testen Sie das Programm. Welche Konvergenzraten erhalten Sie, wenn Sie für verschiedene fixe Polynomordnungen die maximale Gitterweite verändern?