

Besprechungstermin: 19.3.

13. März 2018

## Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 1

### Aufgabe 1:

Sphärische, harmonische Funktionen der Ordnung  $n$  sind Einschränkungen von homogenen ( $p(\alpha x) = \alpha^n p(x)$ ), harmonischen ( $\Delta p = 0$ ) Polynomen vom Grade  $n$  auf die Einheitssphäre.

a) Zeigen Sie: Es existieren in  $\mathbb{R}^3$  genau  $2n + 1$  linear unabhängige sphärische harmonische Funktionen der Ordnung  $n$ . *Hinweis:* Leiten Sie aus  $H_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k}(x_1, x_2)x_3^k$  eine Rekursionsformel für die homogenen Polynome  $\alpha_k$  her.

b) In Kugelkoordinaten gilt für homogene Polynome  $H_n(r, \hat{x}) = r^n Y_n(\hat{x})$ . Zeigen Sie, dass die sphärischen harmonischen Funktionen  $Y_n$  Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators der Einheitssphäre sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel, dass

$$\int_{\Omega} Y_n \overline{Y_m} d\hat{x} = 0, \quad n \neq m, \quad (1)$$

mit  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$ .

d) Formulieren Sie die Aussagen aus (a) und (b) für den  $\mathbb{R}^2$ .

### Aufgabe 2:

Sei  $H = L^2(\mathbb{R})$  und  $A : D(A) \rightarrow H$  der Multiplikationsoperator auf  $H$ , d.h. für  $f \in D(A) := \{f \mid Af \in H\}$  ist

$$(Af) : x \mapsto xf(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Resolventenmenge und das Spektrum von  $A$ . Gibt es Eigenwerte von  $A$ ?

### Aufgabe 3:

Sei  $p(x) = p_1 > 0$  auf  $[0, 1)$  und  $p(x) = p_2 > 0$  auf  $(1, 2]$ . Geben Sie die Eigenpaare  $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1((0, 2)) \setminus \{0\}$  von

$$\int_0^2 u'v' dx = \lambda \int_0^2 p u v dx$$

mit Hilfe der Nullstellen einer skalaren Funktion an.

### Aufgabe 4:

Sie bekommen im TISS ein python-Skript zur Verfügung gestellt. Installieren Sie die benötigten Programme (ngsolve z.B. über <https://ngsolve.org/downloads>) und testen Sie das Programm. Welche Konvergenzraten erhalten Sie, wenn Sie für verschiedene fixe Polynomordnungen die maximale Gitterweite verändern?