Institute for Analysis and Scientific Computing
Computational Mathematics in Engineering

Ass. Prof. Lothar Nannen

Besprechungstermin: 16.4. 10. April 2018

Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 2

Aufgabe 5:
Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass $-\Delta : \mathcal{D}(-\Delta) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ keine Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 6:
Sei $\Omega_\beta := \{r(\cos\varphi, \sin\varphi)^\top \in \mathbb{R}^2 : r \in (0,1), \varphi \in (0, \pi/\beta)\}$ für $\beta \in (1/2, 1)$ ein nicht-konvexer Kreissektor. Verwenden Sie den Ansatz $u(r,\varphi) = (1-r^2)r^\beta \sin(\beta\varphi)$ zur Konstruktion einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega_\beta)$ mit $u \notin H^2(\Omega_\beta)$ der Poisson Gleichung $\Delta u = f$ mit passendem $f \in L^2(\Omega_\beta)$.

Aufgabe 7:
Sei V ein Hilbertraum, $A : V \to V$ ein linearer, beschränkter Operator und $A_n : V \to V$ eine Folge linearer, beschränkter Operatoren mit $\|A_n - A\|_{L(V)} \to 0$ für $n \to \infty$.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert eine beschränkte Inverse $A^{-1} : V \to V$.

(b) Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ die Inversen A_n^{-1} existieren und gleichmäßig beschränkt sind.

Zeigen Sie weiter, dass dann für $f, f_n \in V$ und Lösungen $u, u_n \in V$ von $Au = f$ bzw. $A_n u_n = f_n$ eine Konstante $C > 0$ unabhängig von $n \geq n_0$ existiert mit

$$\|u - u_n\| \leq C\left(\|A - A_n\| + \|f_n - f\|\right).$$

Hinweis:: Für beschränkte, lineare Operatoren A mit $\|A\| < 1$ ist $I - A$ invertierbar und es gilt

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

wobei $A^0 := I$ definiert ist.

Aufgabe 8:
a) Sei $C \in \mathbb{K}^{N\times N}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_N|$, $x^{(0)} \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ und $x^{(t)} := \frac{Cx^{(t-1)}}{\|Cx^{(t-1)}\|}$ die Vektor-Iteration. Zeigen Sie, dass in aller Regel für der Raileigh-Quotienten $\lambda(t) := {x^{(t)}}^* C x^{(t)} / \|x^{(t)}\|_2$ gilt

$$|\lambda^{(t)} - \lambda_1| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2t}\right), \qquad t \to \infty.$$

b) Seien nun $A, B \subset \mathbb{K}^{N\times N}$ hermitesch, positiv definite Matrizen bezüglich des euklidischen Skalarproduktes. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\rho \in \mathbb{K}$, welches nicht Eigenwert von $Au = \lambda Bu$ ist, die Matrix $(A - \rho B)^{-1}B$ hermitesch bezüglich des durch B induzierten Skalarproduktes ist. Welche Fehlerabschätzung erhält man für $\lambda^{(t)} = \rho + 1/\mu^{(t)}$, wenn $\mu^{(t)}$ der Raileigh-Quotient der Vektor-Iteration von $(A - \rho B)^{-1}B$ bezüglich des durch B induzierten Skalarproduktes ist?

Aufgabe 9:
Verwenden Sie das Python-Skript aus Aufgabe 4 zur Überprüfung der Aussagen aus Aufgabe 8. Achten Sie dabei darauf, dass Sie eine Fehlerabschätzung für die Quadrate λ^2 haben.