Institute for Analysis and Scientific Computing
Computational Mathematics in Engineering

Ass. Prof. Lothar Nannen

Besprechungstermin: 28.5. 17. Mai 2018

Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 4

Aufgabe 14:
Sei $A : V \to V$ ein beschränkter, linearer Operator. Weiter sei λ_0 ein isolierter Eigenwert von A und $\Gamma \in \rho(A)$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve um λ_0, deren Inneres mit Ausnahme von λ_0 ebenfalls in der Resolventenmenge von A liegt. Der spektrale Projektor P_{λ_0} sei wie in der Vorlesung definiert.

Beweisen Sie, dass für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ der Raum $\ker(A - \lambda_0 \operatorname{id})^r$ im Bild $P_{\lambda_0}(V)$ des Projektors liegt.

Hinweis: Folgen Sie der Argumentation im Beweis von Lemma 5.1 und nutzen Sie $\ker(A - \lambda_0 \operatorname{id})^r \subset \ker(A - \lambda_0 \operatorname{id})^{r+1}$.

Aufgabe 15:
Zeigen Sie folgendes Hilfsresultat: Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes sei $\mu \neq \lambda_0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten folgendes Intragal

$$I := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda$$

und unterscheiden, ob μ ausserhalb oder innerhalb des von Γ eingeschlossenen Bereichs liegt.

a) $I = 0$ für $n < 0$ und μ ausserhalb.

b) $I = (\mu - \lambda_0)^{-n-1}$ für $n \geq 0$ und μ ausserhalb.

c) $I = 0$ für $n \geq 0$ und μ innerhalb

d) $I = (\mu - \lambda_0)^{-n-1}$ für $n < 0$ und μ innerhalb.

Hinweis: Integralformel von Cauchy.

Aufgabe 16:
Wir entwickeln die Resolvente $R(\mu)$ in der Umgebung von λ_0 in die Laurent-Reihe

$$R(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda_0)^n R_n, \qquad R_n := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} R(\lambda) d\lambda. \tag{1}$$

Es gilt $P_{\lambda_0} = R_{-1}$.

a) Sei $m > 0$. Berechnen Sie $R_{-2}R_{-m}$, indem Sie eine weitere, geeignete Kontur $\tilde{\Gamma}$ ausserhalb von Γ für die Berechnung von R_{-2} verwenden. Leiten Sie daraus die Beziehung $R_{-m} = -D^{m-1}$ mit

$$D := -R_{-2} = -(A - \lambda_0 \operatorname{id}) P_{\lambda_0}$$

her.

b) Sei $m \geq 0$. Berechnen Sie analog $R_0 R_m$ und leiten Sie $R_m = S^{m+1}$ mit $S := R_0$ her. Beweisen Sie

$$P_{\lambda_0} S = S P_{\lambda_0} = 0.$$

c) Sei nun $M := P_{\lambda_0}(V)$ und $N := (\mathrm{id} - P_{\lambda_0})(V)$ mit $V = M \oplus N$. Schließen Sie aus dem vorhergenden die Darstellung

$$R(\mu) = R(\mu)P_{\lambda_0} + R(\mu)(\mathrm{id} - P_{\lambda_0})$$

mit

$$R(\mu)P_{\lambda_0} = (\mu - \lambda_0)^{-1}P_{\lambda_0} - \sum_{n=1}^{\infty}(\mu - \lambda_0)^{-n-1}D^n, \qquad R(\mu)(\mathrm{id} - P_{\lambda_0}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu - \lambda_0)^n S^{n+1}.$$

Für welche μ konvergieren die Reihen?

Aufgabe 17:
Sei nun A ein kompakter Operator, $\lambda_0 \neq 0$, $\ker(A - \lambda_0\,\mathrm{id})^r$ sei der verallgemeinerte Eigenraum und 0 sei außerhalb von Γ.

a) Beweisen Sie, dass die Einschränkung $A|_M : M \to V$ der Abbildung A ein kompakter Operator von $M \to M$ ist. Folgern Sie daraus, dass M endlich-dimensional ist.

b) Zeigen Sie, dass λ_0 ein Eigenwert von $A|_M$ ist und dass die Riesz-Zahl, der Eigenraum und der verallgemeinerte Eigenraum dieser Abbildung mit der von $A : V \to V$ identisch sind.

c) Zeigen Sie, dass $A|_M$ keine weiteren Eigenwerte besitzt, indem Sie zeigen, dass $R(\mu)P_{\lambda_0}$ für alle μ ausserhalb von Γ beschränkt sind.

d) Schließen Sie daraus $M = \ker(A - \lambda_0\,\mathrm{id})^r$.

Hinweis zu a: Die Identität ist genau auf endlich-dimensionalen Räumen kompakt.

Aufgabe 18:
Verwenden Sie die vorigen Aussagen um folgende Darstellung der Resolvente zu erhalten:

$$R(\mu) = \frac{1}{\mu - \lambda_0}P_{\lambda_0} - \sum_{n=1}^{r-1}\frac{1}{(\mu - \lambda_0)^{n+1}}D^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\mu - \lambda_0)^n S^{n+1}. \tag{2}$$

Damit ist die Resolvente in einer Umgebung von λ_0 eine meromorphe Funktion mit einem Pol der Ordnung r bei λ_0.