Institute for Analysis and Scientific Computing
Computational Mathematics in Engineering

Ass. Prof. Lothar Nannen

Besprechungstermin: 11.6. 8. Juni 2018

Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 5

Aufgabe 19:
Seien $T, T_h : E \to E$ die Operatoren aus dem Beweis von Satz 5.17 der Vorlesung und sei

$$\delta(h) := \sum_{l,k=1}^{m} |((A - A_h)\phi_l, \phi_k^*)| + \|(A - A_h)|_E\| \|(A^* - A_h^*)|_{E^*}\| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0. \tag{1}$$

a) Beweisen Sie, dass für hinreichend kleine h eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|T - T_h\| \le C\delta(h).$$

b) Folgern Sie daraus

$$\left\| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j^{(h)}} \right\| \le C\delta(h).$$

Hinweis zu b: Verwenden Sie $\left|\mathbf{Spur}(T_h^{-1} - T^{-1})\right| \le m\|T_h^{-1} - T^{-1}\|$.

Aufgabe 20:
Sei $\Omega := (-1, 1)$ und

$$a(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -c^2, & x < 0 \end{cases}, \qquad c \in (0,1).$$

Weiter sei $V = H_0^1(\Omega)$ und

$$a(u, v) := \int_\Omega a(x)u'(x)\, v'(x)\, dx, \qquad b(u, v) := \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \qquad u, v \in V$$

und der Operator $S : V \to S(V)$ definiert durch

$$(Sv)(x) := \begin{cases} v|_{(0,1)}(x), & x > 0 \\ -v|_{(-1,0)}(x) + 2v|_{(0,1)}(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass $S : V \to V$ ein beschränkter, linearer Operator ist mit stetiger Inversen.

b) Beweisen Sie, dass die Bilinearformen $\tilde{a}(\cdot,\cdot) := a(\cdot, S\cdot)$ und $\tilde{b}(\cdot,\cdot) := b(\cdot, S\cdot)$ die Voraussetzungen aus Abschnitt 6 des Vorlesungsskriptes erfüllen.

c) Damit sind die Konvergenzaussagen aus Abschnitt 6 auf die diskreten Eigenwertprobleme $\tilde{a}(u_h, v_h) = \lambda_h \tilde{b}(u_h, v_h)$ anwendbar. Sind sie auch auf die Eigenwertprobleme $a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h)$ übertragbar?

Hinweis zu b: Young-Ungleichung $fg \le \frac{f^2}{2\eta} + \frac{\eta g^2}{2}$ für beliebiges $\eta > 0$.

Aufgabe 21:
Lösen Sie das Beispiel aus der vorigen Aufgabe numerisch um festzustellen, wie die Konvergenzraten

tatsächlich ausschauen. Sie können dazu einen einfachen, 1d Fem-Code mit Hutfunktionen (also $p = 1$) verwenden. Referenzlösungen können Sie erhalten, indem Sie die Nullstellen der Determinante folgender Matrix suchen:

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\lambda/c) - \exp(-\lambda/c) & \exp(-\mathrm{i}\lambda) - \exp(\mathrm{i}\lambda)) \\ -c(\exp(\lambda/c) + \exp(-\lambda/c)) & \mathrm{i}(\exp(-\mathrm{i}\lambda) + \exp(\mathrm{i}\lambda)) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22:
Seien $B_1, B_2 : V \to V$ lineare, kompakte Operatoren. Gesucht seien die Eigenpaare $(\omega, u) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times V \setminus \{0\}$ von

$$\left(\mathrm{id} + \omega B_1 - \omega^2 B_2\right) u = 0 \tag{2}$$

bzw. für endlich-dimensionale Teilräume $V_h \subset V$ mit punktweise konvergenter Projektion $\Pi_h : V \to V_h$ die Eigenpaare $(\omega_h, u_h) \in \mathbb{C} \times V_h \setminus \{0\}$ von

$$\left(\mathrm{id} + \omega_h \Pi_h B_1 - \omega_h^2 \Pi_h B_2\right) u_h = 0. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass (2) äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & B_1 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \mathbf{y} = \omega \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -B_1 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \frac{1}{\omega} \mathbf{y}. \tag{4}$$

mit $\mathbf{y} \in V^2 \setminus \{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass (3) äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} \Pi_h & \Pi_h B_1 \\ 0 & \Pi_h \end{pmatrix} \mathbf{y}_h = \omega_h \begin{pmatrix} 0 & \Pi_h B_2 \\ \Pi_h & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}_h \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -\Pi_h B_1 & \Pi_h B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}_h = \frac{1}{\omega_h} \mathbf{y}_h. \tag{5}$$

c) Beweisen Sie

$$\lim_{h \to 0} \left\| \begin{pmatrix} -\Pi_h B_1 & \Pi_h B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B_1 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Hinweis zu b: Überlegen Sie sich zunächst, warum Sie beim verallgemeinerten Eigenwertproblem die Projektionen, die nicht vor den kompakten Operatoren stehen, durch die Identität ersetzen dürfen.