Institute for Analysis and Scientific Computing
Computational Mathematics in Engineering

Ass. Prof. Lothar Nannen

Besprechungstermin: 25.6. 18. Juni 2018

Übung zu Eigenwertproblemen – Übung 6

Aufgabe 23:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\omega \in \mathbb{C}$ und $u \in V := H_0^1(\Omega)$ mit $u \neq 0$ ein Eigenpaar von

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \epsilon(\omega) \int_\Omega u\, v\, dx = 0, \qquad v \in V \tag{1}$$

mit

$$\epsilon(\omega) := \omega^2 + \sum_{j=1}^n \frac{C_j \omega}{\omega + p_j}, \qquad \omega \in \mathbb{C}, \qquad C_j, p_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n.$$

a) Reformulieren Sie dieses rationale Eigenwertproblem in ein variationelles, lineares Eigenwertproblem auf V^{n+2}, indem Sie $v_j := \frac{\omega}{\omega + p_j} u$ verwenden.

b) Sei nun $V_N \subset V$ mit $\dim(V_N) = N \in \mathbb{N}$. Formulieren Sie das zugehörige verallgemeinerte, lineare Matrix-Eigenwertproblem und überlegen Sie, wie man einen shift-and-invert Ansatz für dieses Eigenwertproblem so implementieren könnte, dass lineare Gleichungssysteme der Größe $N \times N$ an Stelle von $(n+2)N \times (n+2)N$ zu lösen sind.

c) Implementieren Sie diesen Ansatz in Netgen/NgSolve in Kombination mit dem Eigenwert-Löser *eigs* von scipy. Dazu erhalten Sie im TISS ein Beispiel-Programm, welches die netgen-Funktionalität mit der scypy-Funktionalität verbindet. Zum Testen wären Parameter $n = 1$ und $C_1 = -900$, $p_1 = 400i$ passend. Sie sollten aber auch andere Parameter testen um festzustellen, wie sich die Eigenwerte in Abhängigkeit der Parameter verhalten. Ein guter Ansatz zur Fehlersuche kann $C_1 = 0$ sein, da Sie dann die Eigenwerte auf einem Rechteck analytisch ausrechnen können.

Aufgabe 24:
Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ und $A = U\Sigma V^*$ mit $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Singulärwertzerlegung von A. Weiter sei $U = (U_1, U_2)$ mit $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $U_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)}$ und $\Sigma = (\operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \mathbf{0})^T$ mit $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{(m-n)\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V & 0 \\ U_1 & -U_1 & \sqrt{2} U_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)} \tag{2}$$

unitär ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} Q = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, -\sigma_1, \dots, -\sigma_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}). \tag{3}$$

c) Erklären Sie, wie man damit die Singulärwertzerlegung von A gewinnen kann.

Aufgabe 25:
Eine andere Variante zur Berechnung der Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m > n$ wäre, die

Eigenwertprobleme von A^*A oder AA^* zu lösen. Die Wurzeln der Eigenwerte sind dann genau die Singulärwerte von A. Dies kann sogar ohne Berechnung von A^*A geschehen. Sei dazu $q_1 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|q_1\|_2 = 1$ ein Zufallsvektor, $\beta_0 := 0$ und für $j = 1, \dots, k < n$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_j &:= Aq_j - \beta_{j-1}p_{j-1}, && \text{(4a)}\\
\alpha_j &:= \|\tilde{p}_j\|_2, && \text{(4b)}\\
p_j &:= \frac{1}{\alpha_j}\tilde{p}_j, && \text{(4c)}\\
\tilde{q}_{j+1} &:= A^*p_j - \alpha_j q_j, && \text{(4d)}\\
\beta_j &:= \|\tilde{q}_{j+1}\|_2, && \text{(4e)}\\
q_{j+1} &:= \frac{1}{\beta_j}\tilde{q}_{j+1}. && \text{(4f)}
\end{aligned}
$$

a) Trivialerweise gilt $p_j^*p_j = q_j^*q_j = 1$ für alle $j = 1, \dots, k$. Zeigen Sie zunächst, dass aufeinanderfolgende Vektoren zueinander orthogonal stehen, d.h.

$$q_j^*q_{j+1} = p_j^*p_{j+1} = 0.$$

b) Zeigen Sie nun, dass paarweise verschiedene Vektoren aufeinander orthogonal stehen, d.h.

$$q_j^*q_l = p_j^*p_l = 0, \qquad 1 \le j \ne l \le k.$$

c) Sei nun $P_k := (p_1, \dots, p_k)$ und $Q_k := (q_1, \dots, q_k)$ für $k = 1, \dots, j$. Zeigen Sie, dass gilt

$$AQ_k = P_kB_k, \qquad A^*P_k = Q_kB_k^* + \beta_k q_{k+1}e_k^*$$

mit der Bidiagonalmatrix

$$B_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \\ & & & \alpha_k \end{pmatrix}$$

und dem k-ten Einheitsvektor e_k. Vergleichen Sie das Verfahren mit dem Arnoldi-Verfahren aus der Vorlesung und dort insbesondere mit der Gleichung (4.11). Schließen Sie daraus, dass (4) indirekt ein Lanczos-Verfahren für A^*A implementiert.

d) Folgern Sie zusammen mit den vorigen Teilaufgaben, dass für $\beta_k = 0$ gilt

$$A = P_kB_kQ_k^*.$$

e) Zeigen Sie nun, wie man für $\beta_k = 0$ mit einer Singulärwertzerlegung von der Bidiagonalmatrix B_k eine Singulärwertzerlegung von A gewinnen kann.

Aufgabe 26:

Kombinieren wir nun die vorigen beiden Aufgaben. Zeigen Sie, dass das Lanczos-Verfahren angewandt auf die hermitesche Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Startvektor $(0, q_1)^\top$ alternierend zu den Vektoren $(0, q_j)^\top$ und $(p_j, 0)^\top$ führt. Somit führen zwei Schritte des Lanczos-Verfahrens für H auf exakt die gleichen Informationen wie ein Schritt des Algorithmus aus der vorigen Aufgabe.