Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen

Eigenwertprobleme - Übung 1

Termin: 17.3.2022 10. März 2022

Aufgabe 1: Sphärische, harmonische Funktionen der Ordnung n sind Einschränkungen von homogenen ($p(\alpha x) = \alpha^n p(x)$), harmonischen ($\Delta p = 0$) Polynomen vom Grade n auf die Einheitssphäre.
a) Zeigen Sie: Es existieren in $\mathbb{R}^3$ genau $2n+1$ linear unabhängige sphärische harmonische Funktionen der Ordnung n. *Hinweis:* Leiten Sie aus $H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}(x_1, x_2)x_3^k$ eine Rekursionsformel für die homogenen Polynome α_k her.
b) In Kugelkoordinaten gilt für homogene Polynome $H_n(r, \hat{x}) = r^n Y_n(\hat{x})$. Zeigen Sie, dass die sphärischen harmonischen Funktionen Y_n Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators der Einheitssphäre sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.
c) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel, dass

$$\int_\Omega Y_n \overline{Y_m} d\hat{x} = 0, \qquad n \neq m, \tag{1}$$

mit $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$.
d) Formulieren Sie die Aussagen aus (a) und (b) für den $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2: Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $A : D(A) \to H$ der Multiplikationsoperator auf H, d.h. für $f \in D(A) := \{f \mid Af \in H\}$ ist

$$(Af) : x \mapsto xf(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Resolventenmenge und das Spektrum von A. Gibt es Eigenwerte von A?

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des negativen Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen auf dem Intervall $[0, R]$. Was passiert im Grenzfall $R \to \infty$? Welches Spektrum $\sigma(-\Delta)$ würden Sie auf $L^2(\mathbb{R}_+)$ erwarten? Verwenden Sie dazu auch Aufg. 2.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Probleme

$$-u''(x) - \lambda u(x) \;\; = 0 \quad \forall x \in [0, R], \qquad u(0) = 1, \quad u(R) = 0$$

für $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$ und $R > 0$. Welches Verhalten haben die Lösungen für $R \to \infty$?

Aufgabe 5: Sei $p(x) = p_1 > 0$ auf $[0, 1)$ und $p(x) = p_2 > 0$ auf $(1, 2]$. Geben Sie die Eigenpaare $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1((0, 2)) \setminus \{0\}$ von

$$\int_0^2 u'v' \, dx = \lambda \int_0^2 p \, u \, v \, dx$$

mit Hilfe der Nullstellen einer skalaren Funktion an.

Aufgabe 6: Beweisen Sie Bemerkung 2.4 des Vorlesungsskriptes.