Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen

Eigenwertprobleme - Übung 3

Termin: 9.5.2022 28. April 2022

Aufgabe 13: Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet. Weiter seien a, b, Sesquilinearformen auf $H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx,$$
$$b(u,v) = \int_\Omega u\overline{v} dx,$$
$$c(u,v) = z\int_\Omega u\overline{v} dx$$

und $z \in \mathbb{C}$. Wir betrachten das quadratische Eigenwertproblem: Finde $(\omega, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ mit

$$a(u,v) - \omega c(u,v) - \omega^2 b(u,v) = 0, \qquad v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für z mit $\Im(z) \neq 0$ alle $\omega > 0$ keine Eigenwerte sein können. Verwenden Sie dazu eine spezielle Testfunktion v.
b) Überführen Sie das quadratische Eigenwertproblem in ein (lineares) Eigenwertproblem der Form

$$\tilde{a}(u,v) = \omega \tilde{b}(u,v).$$

Aufgabe 14: Was passiert, wenn rundungsfehlerfrei gerechnet wird und wenn der Startvektor v_0 des Krylov-Raumes ein Eigenvektor der Matrix C ist? Welche Auswirkungen hat das auf Satz 4.6 bzw. die Konvergenz der Eigenwerte?

Aufgabe 15: Verwenden Sie ähnliche Techniken wie im Beweis 4.6 um zu zeigen, dass gilt

$$\tan\theta(u_i, \mathcal{K}_m(C, v_0)) \leq \frac{\kappa_i}{T_{m-i}(\gamma_i)} \tan\theta(u_i, v_0)$$

mit γ_i wie im Satz 4.6 und

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j - \lambda_N}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Hinweis: Entwickeln Sie $y_i := (I - P_i)v_0 / \|(I - P_i)v_0\|$ in die Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. P_i ist dabei der spektrale Projektor auf den Eigenraum zum i-ten Eigenvektor. Nutzen Sie weiter die Darstellung eines beliebigen $v \in \mathcal{K}_m$ aus Lemma 4.3, um den Abstand zwischen u_i und $\mathcal{K}_m$ auf den Abstand zwischen u_i und v_0 zurückzuführen.

Aufgabe 16: Im Anhang des Skriptes finden Sie die Grundlagen des QR-Verfahrens zur Berechnung von Eigenwerten kleiner Matrizen. Machen Sie sich mit diesem Verfahren vertraut. Erklären Sie dabei insbesondere die Bedeutung von Hessenberg-Matrizen für das QR-Verfahren sowie die Gründe für die Verwendung von Givens-Rotationen und shifts.

Aufgabe 17: Gesucht seien die Eigenwerte λ in der Nähe von $\rho \in \mathbb{R}$ des Eigenwertproblems

$$Ay = \lambda By,$$

mit hermiteschen Matrizen A und B. Formulieren Sie das Arnoldi-Verfahren aus Alg. 4.7 für dieses Problem mit einem shift-and-invert Ansatz. Nutzen Sie dabei ein Skalarprodukt, sodass die entstehende Hessenberg-Matrix eine hermitesche Tridiagonalmatrix wird.

Aufgabe 18: Implementieren Sie das Arnoldi Verfahren zu Berechnung von Eigenwerten in ngspy. Als Eigenwertlöser auf dem Krylov-Raum können Sie eine scipy Routine verwenden. Nutzen Sie Ihren Algorithmus, um die Eigenwerte des negativen Laplace Operators auf einem Rechteck zu approximieren.