Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen

Eigenwertprobleme - Übung 5

Termin: 23.6.2022 15. Juni 2022

Aufgabe 25: Sei $\Omega := (-1,1)$ und

$$a(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -c^2, & x < 0 \end{cases}, \qquad c \in (0,1).$$

Weiter sei $V = H_0^1(\Omega)$ und

$$a(u,v) := \int_\Omega a(x) u'(x)\, v'(x)\, dx, \qquad b(u,v) := \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \qquad u,v \in V$$

und der Operator $S : V \to S(V)$ definiert durch

$$(Sv)\,(x) := \begin{cases} v|_{(0,1)}(x), & x > 0 \\ -v|_{(-1,0)}(x) + 2v|_{(0,1)}(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass $S : V \to V$ ein beschränkter, linearer Operator ist mit stetiger Inversen.
b) Beweisen Sie, dass die Bilinearformen $\tilde{a}(\cdot,\cdot) := a(\cdot, S\cdot)$ und $\tilde{b}(\cdot,\cdot) := b(\cdot, S\cdot)$ die Voraussetzungen aus Abschnitt 7 des Vorlesungsskriptes erfüllen.
c) Damit sind die Konvergenzaussagen aus Abschnitt 6 auf die diskreten Eigenwertprobleme $\tilde{a}(u_h, v_h) = \lambda_h \tilde{b}(u_h, v_h)$ anwendbar. Sind sie auch auf die Eigenwertprobleme $a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h)$ übertragbar?

Hinweis zu b: Young-Ungleichung $fg \leq \frac{f^2}{2\eta} + \frac{\eta g^2}{2}$ für beliebiges $\eta > 0$.

Aufgabe 26: Lösen Sie das Beispiel aus der vorigen Aufgabe numerisch um festzustellen, wie die Konvergenzraten tatsächlich ausschauen. Sie können dazu einen einfachen, 1d Fem-Code mit Hutfunktionen (also $p = 1$) verwenden. Referenzlösungen können Sie erhalten, indem Sie die Nullstellen der Determinante folgender Matrix suchen:

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\lambda/c) - \exp(-\lambda/c) & \exp(-\mathrm{i}\lambda) - \exp(\mathrm{i}\lambda)) \\ -c\,(\exp(\lambda/c) + \exp(-\lambda/c)) & \mathrm{i}\,(\exp(-\mathrm{i}\lambda) + \exp(\mathrm{i}\lambda)) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: Seien $B_1, B_2 : V \to V$ lineare, kompakte Operatoren. Gesucht seien die Eigenpaare $(\omega, u) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times V \setminus \{0\}$ von

$$\left(\mathrm{id} + \omega B_1 - \omega^2 B_2\right) u = 0 \tag{1}$$

bzw. für endlich-dimensionale Teilräume $V_h \subset V$ mit punktweise konvergenter Projektion $\Pi_h : V \to V_h$ die Eigenpaare $(\omega_h, u_h) \in \mathbb{C} \times V_h \setminus \{0\}$ von

$$\left(\mathrm{id} + \omega_h \Pi_h B_1 - \omega_h^2 \Pi_h B_2\right) u_h = 0. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass (1) äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & B_1 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \mathbf{y} = \omega \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -B_1 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \frac{1}{\omega} \mathbf{y}. \tag{3}$$

mit $\mathbf{y} \in V^2 \setminus \{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass (2) äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} \Pi_h & \Pi_h B_1 \\ 0 & \Pi_h \end{pmatrix} \mathbf{y}_h = \omega_h \begin{pmatrix} 0 & \Pi_h B_2 \\ \Pi_h & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}_h \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -\Pi_h B_1 & \Pi_h B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}_h = \frac{1}{\omega_h} \mathbf{y}_h. \tag{4}$$

c) Beweisen Sie

$$\lim_{h \to 0} \left\| \begin{pmatrix} -\Pi_h B_1 & \Pi_h B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B_1 & B_2 \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Hinweis zu b: Überlegen Sie sich zunächst, warum Sie beim verallgemeinerten Eigenwertproblem die Projektionen, die nicht vor den kompakten Operatoren stehen, durch die Identität ersetzen dürfen.

Aufgabe 28: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\omega \in \mathbb{C}$ und $u \in V := H_0^1(\Omega)$ mit $u \neq 0$ ein Eigenpaar von

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \epsilon(\omega) \int_\Omega u\, v\, dx = 0, \qquad v \in V \tag{5}$$

mit

$$\epsilon(\omega) := \omega^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j \omega}{\omega + p_j}, \qquad \omega \in \mathbb{C}, \qquad C_j, p_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, n.$$

a) Reformulieren Sie dieses rationale Eigenwertproblem in ein variationelles, lineares Eigenwertproblem auf V^{n+2}, indem Sie $v_j := \frac{\omega}{\omega + p_j} u$ verwenden.

b) Sei nun $V_N \subset V$ mit $\dim(V_N) = N \in \mathbb{N}$. Formulieren Sie das zugehörige verallgemeinerte, lineare Matrix-Eigenwertproblem und überlegen Sie, wie man einen shift-and-invert Ansatz für dieses Eigenwertproblem so implementieren könnte, dass lineare Gleichungssysteme der Größe $N \times N$ an Stelle von $(n+2)N \times (n+2)N$ zu lösen sind.

c) Implementieren Sie diesen Ansatz in Netgen/NgSolve. Dazu können Sie z.B. den Eigenwert-Löser *eigs* von scipy verwenden. Zum Testen wären Parameter $n = 1$ und $C_1 = -900$, $p_1 = 400i$ passend. Sie sollten aber auch andere Parameter testen um festzustellen, wie sich die Eigenwerte in Abhängigkeit der Parameter verhalten. Ein guter Ansatz zur Fehlersuche kann $C_1 = 0$ sein, da Sie dann die Eigenwerte auf einem Rechteck analytisch ausrechnen können.