Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Fr, 26.04.2024) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (4 Punkte) Gegeben sei das folgende Vektorfeld:

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+z^2}\sin(z) + yze^{xy} \\ xze^{xy} - \frac{z}{(y+1)^2} \\ \ln(x^2+z^2)\cos(z) + 2z\frac{\sin(z)}{x^2+z^2} + e^{xy} + \frac{1}{y+1} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie das dazugehörige Potential $\Phi(x,y,z)$, welches die Bedingung $\Phi(0,1,1) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Integrieren Sie zuerst nach x, dann nach y und schließlich nach z. Verwenden Sie die Substitution $u = x^2 + z^2$.

Der Zusammenhang zwischen einem Potential und dem entsprechenden Gradientenfeld lautet

$$A(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z)$$

weswegen folgende Gleichheiten gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+z^2}\sin(z) + yze^{xy} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) = xze^{xy} - \frac{z}{(y+1)^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) = \ln(x^2+z^2)\cos(z) + 2z\frac{\sin(z)}{x^2+z^2} + e^{xy} + \frac{1}{y+1} \tag{3}$$

Ausgehend davon kann zunächst Gleichung (1) nach x integriert werden

$$\Phi(x,y,z) = \int \frac{2x}{x^2+z^2}\sin(z) + yze^{xy}\mathrm{d}x$$

die zwei Integrale werden separat berechnet, wobei für das erste der Hinweis genutzt wird

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+z^2}\sin(z)\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} u = x^2+z^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}\sin(z)\mathrm{d}u \\ &= \ln(u)\sin(z) = \ln(x^2+z^2)\sin(z) \\ \int yze^{xy}\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} v = xy \\ \mathrm{d}v = y\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int ze^{v}\mathrm{d}v \\ &= ze^{v} = ze^{xy}\end{aligned}$$

Insgesamt lautet der Ausdruck

$$\Phi(x,y,z) = \ln(x^2+z^2)\sin(z) + ze^{xy} + C_1(y,z)$$

wobei die gemeinsame Integrationskonstante C_1 hinzugefügt wurde. Um diese zu bestimmen, wird die Funktion nach y differenziert und mit (2) verglichen

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) = xze^{xy} + \frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) \stackrel{!}{=} xze^{xy} - \frac{z}{(y+1)^2}$$

daraus folgt unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) = -\frac{z}{(y+1)^2}$$

$$C_1(y,z) = -\int \frac{z}{(y+1)^2}\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} u = y+1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y \end{array} \right| = -\int \frac{z}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{z}{u} + C_2(z) = \frac{z}{y+1} + C_2(z)$$

und für Φ gilt

$$\Phi(x,y,z) = \ln(x^2+z^2)\sin(z) + ze^{xy} + \frac{z}{y+1} + C_2(z) \tag{4}$$

Schließlich muss nach z abgeleitet werden, um mit Hilfe von (3) C_2 bestimmen zu können

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) = \ln(x^2+z^2)\cos(z) + 2z\frac{\sin(z)}{x^2+z^2} + e^{xy} + \frac{1}{y+1} + \frac{\partial}{\partial z}C_2(z)$$

$$\stackrel{!}{=} \ln(x^2+z^2)\cos(z) + 2z\frac{\sin(z)}{x^2+z^2} + e^{xy} + \frac{1}{y+1}$$

und somit ist

$$\frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2(z) = C = \text{const.}$$

Das Potential lautet also

$$\Phi(x,y,z) = \ln(x^2+z^2)\sin(z) + ze^{xy} + \frac{z}{y+1} + C$$

Der Wert von C wird durch die Bedingung $\Phi(0,1,1) = 0$ bestimmt

$$\Phi(0,1,1) = \ln(1)\sin(1) + 1e^0 + \frac{1}{1+1} + C = \frac{3}{2} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{2}$$

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie jene Bereiche, für die das Potential definiert ist.

Das Argument des Logarithmus' darf den Wert 0 nicht annehmen, weshalb x und z nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Somit ist Φ entlang der y-Achse nicht definiert. Weiters muss $y \neq -1$ gelten, da der Bruch sonst divergieren würde. Der Definitionsbereich lautet somit

$$D = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0 \ \vee \ y = -1\}.$$

c) (1 Punkt) Gegeben seien zwei Kurven zwischen den Punkten $P = (3, 0, 0)$ und $Q = (1, 0, 0)$, die wie folgt parametrisiert sind:

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r_2(s) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(s) \\ \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $t \in [0, 2]$, $s \in [0, \pi]$. Werden sich die Kurvenintegrale von A über $r_1(t)$ und $r_2(s)$ unterscheiden? Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie dafür Ihre Ergebnisse aus Unterpunkt b).

Beide Kurven verlaufen im Definitionsbereich D des Potentials. Deshalb sind die Kurvenintegrale wegunabhängig und Ihre Werte werden identisch sein.

- **Aufgabe 2.**

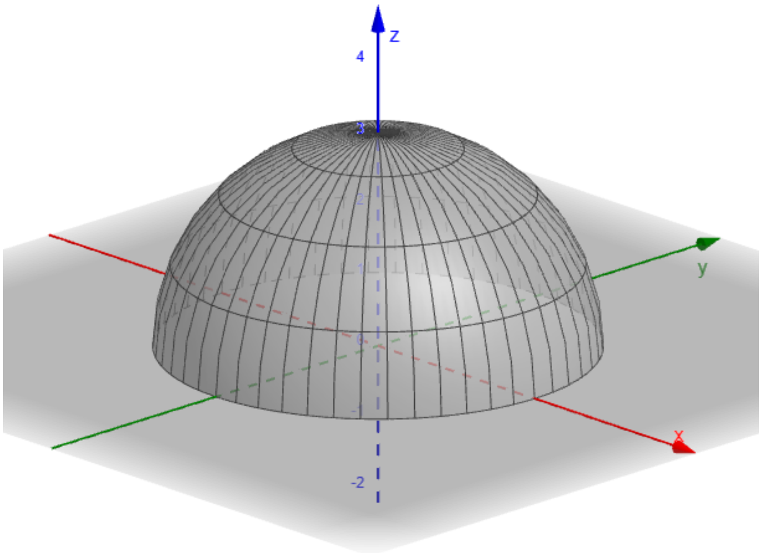
Gegeben sei ein Vektorfeld

$$W(x,y,z) = \nabla \times U = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

und eine Fläche der Form

$$\partial V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, \quad 0 \leq z\}.$$

Siehe Skizze



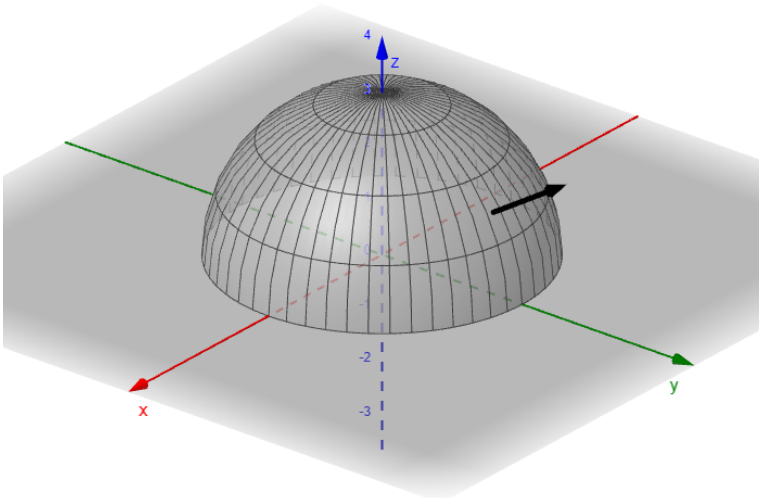
a) (2 Punkt) Die Fläche ∂V wird mit Kugelkoordinaten parametrisiert. Zeigen Sie, dass der Normalvektor an ∂V folgende Form hat:

$$n(\theta,\varphi) = 9\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\partial V = \left\{ \varrho(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 3\cos(\theta) \end{pmatrix} \; (\theta,\varphi) \in B \right\}, \text{ wobei } B = \{(\theta,\varphi),\, \theta \in [0,\pi/2],\, \varphi \in [0,2\pi]\}$$

$$n = \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 3\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ 3\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -3\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 3\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9\sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ 9\sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ 9\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) \end{pmatrix} = 9\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



b) (3 Punkt) Berechnen Sie (direkt) das Flussintegral des Vektorfeldes W durch die Fläche ∂V.
Hinweis: $\int \sin x^2 \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + C$.

$$\text{Fluss} = \int_{\partial V} W \cdot dS = \int_B W \cdot n \; d(\theta, \varphi)$$

$$W(\partial V) = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cos\theta \\ 0 \\ \sqrt{9\sin^2\theta(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cos\theta \\ 0 \\ \sqrt{9\sin^2\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cos\theta \\ 0 \\ 3|\sin\theta| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cos\theta \\ 0 \\ 3\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\text{weil } \theta \in \left[0, \;\; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} W_x n_x \;\; d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 54 \sin\theta^2 \cos\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \;\; d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 54 \sin\theta^2 \cos\theta \; d\theta \cdot 0 = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} W_y n_y \;\; d\varphi d\theta = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} W_z n_z \;\; d\varphi d\theta = 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta^2 \cos\theta \;\; d\varphi d\theta = 54\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^2 \cos\theta \;\; d\theta$$

$$\text{Fluss} = 54\pi \left[\frac{\sin^3(\theta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{54}{3}\pi = 18\pi$$

c) (1 Punkt) Gegeben ist eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^3$ der Form,

$$Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x, y, z \leq 1\}$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes V durch die geschlossene Oberfläche von Q.

$$\text{Fluss} = \int_{\partial Q} W \cdot dS = \int_Q \nabla \cdot W \, d(x, y, z) = \int_Q \nabla \cdot (\nabla \times U) \, d(x, y, z) = \int_Q 0 \, d(x, y, z) = 0.$$

Gradienenfelder sind wirbelfrei!

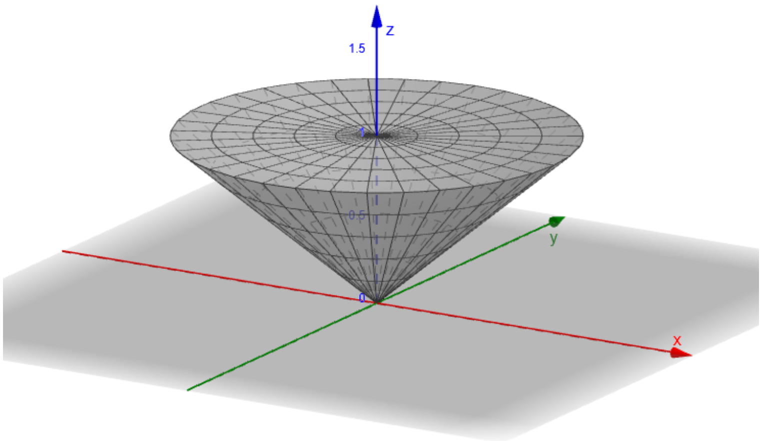
- **Aufgabe 3.**
  (2 Punkte) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 + 6xz \\ 2x + xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

und einen Vollkegel

$$\partial V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = 3z, \;\; 0 \le z \le 1\},$$

siehe Skizze.



a) Berechnen Sie den Normalvektor auf den Kegelmantel ∂M (die Berechnung des Normalvektors auf die Deckfläche ist nicht notwendig) und überprüfen Sie, ob der Normalverktor positiv orientiert ist im Bezug auf die Durchlaufrichtung der Randurve.

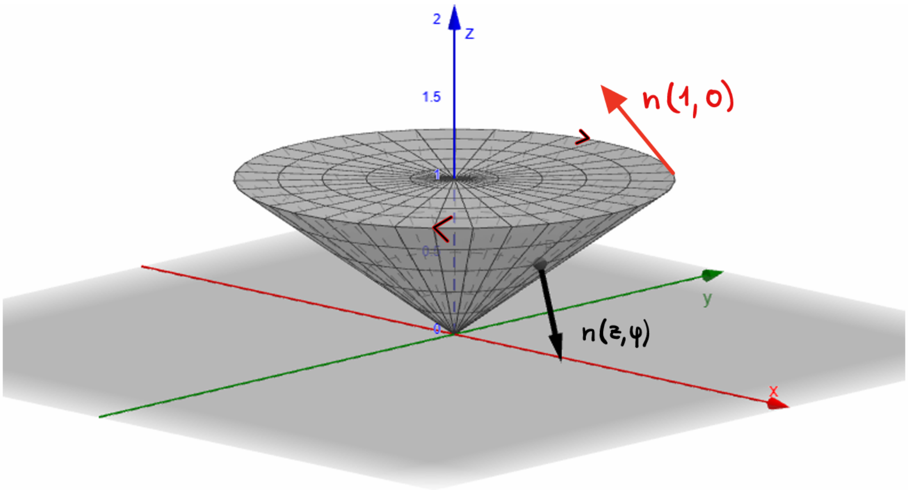
Parametrisierung von ∂M mit Zylinderkoordinaten,

$$\partial M = \left\{ \rho(z,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z\cos(\varphi) \\ 3z\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi \;,\;\; 0 \le z \le 1 \right\}$$

Der Normalvektor,

$$n(z,\varphi) = \frac{\partial \rho}{\partial z} \times \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 3\cos(\varphi) \\ 3\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3z\sin(\varphi) \\ 3z\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z\cos(\varphi) \\ -3z\sin(\varphi) \\ 9z \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Richtung des Normalvektors,



Wir legen den Unlaufsinn auf dem Rand der Fläche als $\varphi \in [2\pi, 0]$ fest. Dann muss der Normalvektor nach außen zeigen. Dazu berechnen wir

$$n(1,0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass n in das Innere des Kegels zeigt. Wir müssen also,

$$n(z,\varphi) = \begin{pmatrix} 3z\cos(\varphi) \\ 3z\sin(\varphi) \\ -9z \end{pmatrix}$$

wählen.

b) (4 Punkte) Mit Hilfe des Satzes von Gauß berechnen Sie den Fluss von F durch die Kegeloberfläche ∂V.

Satz von Gauß lautet

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_V \nabla \cdot F \cdot dV.$$

Parameterdarstellung von V

$$V(z,\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \;\; \rho \in [0,3z], \;\; \varphi \in [0,2\pi], \;\; z \in [0,1] \right\}$$

$\nabla \cdot F = 6z + 2xy, \quad d(x,y,z) = \rho d\rho d\varphi dz \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \cdot F dV &= \int_{z=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{3z} \left(6z + 2\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi\right) \rho d\rho d\varphi dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3z} 6z\rho d\rho d\varphi dz + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3z} 2\rho^3 \sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi dz \\
&= \left[\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 0\right] = 2\pi \int_0^1 27z^3 dz = \frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$