Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2024

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe B (Fr, 26.04.2024) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

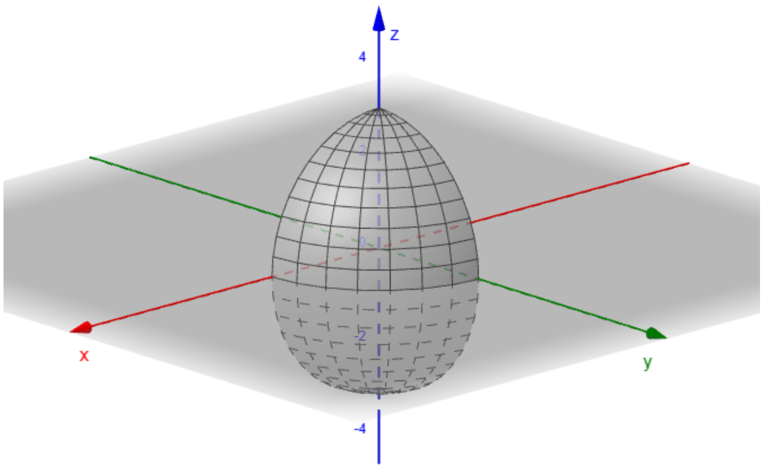
• **Aufgabe 1.** Gegeben sei ein Vektorfeld

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine Fläche der Form

$$\partial V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, \quad 0 \le x, y\}.$$

Siehe Skizze



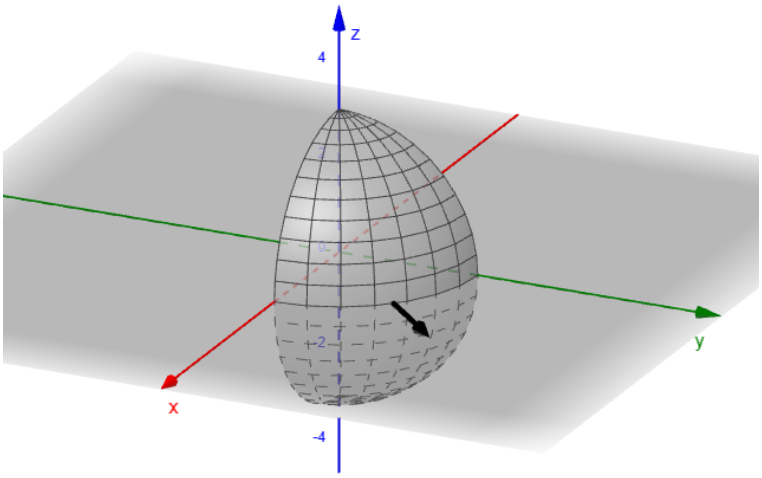
a) (2 Punkt) Die Fläche ∂V wird mit Kugelkoordinaten parametrisiert. Zeigen Sie, dass der Normalvektor an ∂V folgende Form hat:

$$n(\theta,\varphi) = 9\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\partial V = \left\{ \varrho(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 3\cos(\theta) \end{pmatrix},\ (\theta,\varphi) \in B \right\},\ \text{wobei } B = \{(\theta,\varphi),\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,\pi/2]\}$$

$$\Rightarrow\ n(\theta,\varphi) = \frac{\partial\varrho}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} 3\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ 3\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -3\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 3\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9\sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ 9\sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ 9\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) \end{pmatrix} = 9\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



b) (3 Punkt) Berechnen Sie (direkt) das Flussintegral des Vektorfeldes a durch die Fläche ∂V.

Hinweis: $\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Fluss} = \int_{\partial V} a \cdot dS = \int_B a(\theta,\varphi) \cdot n(\theta,\varphi)\, d(\theta,\varphi) = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\theta,\varphi) \cdot n(\theta,\varphi)\, d(\theta,\varphi)$$

$$a(\theta,\varphi) = (a_x, a_y, a_z) = (\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T \ \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_z\, n_z \ \ d\varphi d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_x\, n_x + a_y\, n_y \ \ d\varphi d\theta = 18 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi \ \ d\varphi d\theta = 9\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \ \ d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\cos(y)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y) dy = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Fluss} = \frac{9}{2}\pi$$

c) (1 Punkt)

Gegeben sei ein weiteres Vektorfeld $b(x,y,z)$, mit

$$a(x,y,z) = \nabla \times b(x,y,z), \qquad a(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^3$ der Form,

$$Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad -1 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes a durch die geschlossene Oberfläche von Q.

$$\text{Fluss} = \int_{\partial Q} a \cdot dS = \int_Q \nabla \cdot a\, d(x,y,z) = \int_Q \nabla \cdot (\nabla \times b)\, d(x,y,z) = \int_Q 0\, d(x,y,z) = 0.$$

Gradienenfelder sind wirbelfrei!

- **Aufgabe 2.**

a) (4 Punkte) Gegeben sei das folgende Vektorfeld:

$$B(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} \\ -2ye^{x+z} - \frac{z}{1+(yz)^2} \\ \frac{1}{z}\sin(x+z) + \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} - \frac{y}{1+(yz)^2} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie das dazugehörige Potential $\Phi(x,y,z)$, das die Bedingung $\Phi(1,0,1) = 1$ erfüllt.

Hinweis: Integrieren Sie zuerst nach x, dann nach y und schließlich nach z. Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

Der Zusammenhang zwischen einem Potential und dem entsprechenden Gradientenfeld lautet

$$B(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z)$$

weswegen folgende Gleichheiten gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) = \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) = -2ye^{x+z} - \frac{z}{1+(yz)^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) = \frac{1}{z}\sin(x+z) + \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} - \frac{y}{1+(yz)^2} \tag{3}$$

Ausgehend davon kann zunächst Gleichung (1) nach x integriert werden

$$\Phi(x,y,z) = \int \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = x+z \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \ln(z)\cos(u) - y^2 e^u$$

$$= \ln(z)\sin(u) - y^2 e^u + C_1(y,z) = \ln(z)\sin(x+z) - y^2 e^{x+z} + C_1(y,z)$$

Dieser Ausdruck wird nach y differenziert und mit (2) verglichen

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) = -2ye^{x+z} + \frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) \stackrel{!}{=} -2ye^{x+z} - \frac{z}{1+(yz)^2}$$

daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y}C_1(y,z) = -\frac{z}{1+(yz)^2}$$

$$C_1(y,z) = \int -\frac{z}{1+(yz)^2}\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} v = yz \\ \mathrm{d}v = z\mathrm{d}y \end{array} \right| = -\int \frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v$$

$$\stackrel{\text{Hinweis}}{=} -\arctan(v) + C_2(z) = -\arctan(yz) + C_2(z)$$

Der neue Ausdruck für Φ

$$\Phi(x,y,z) = \ln(z)\sin(x+z) - y^2 e^{x+z} - \arctan(yz) + C_2(z)$$

muss nach z abgeleitet werden

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) = \frac{1}{z}\sin(x+z) + \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} - \frac{y}{1+(yz)^2} + \frac{\partial}{\partial z}C_2(z)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{z}\sin(x+z) + \ln(z)\cos(x+z) - y^2 e^{x+z} - \frac{y}{1+(yz)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2(z) = C = \text{const.}$$

Um die Konstante zu bestimmen, wird die Bedingung $\Phi(1,0,1) = 1$ verwendet

$$\Phi(1,0,1) = \ln(1)\sin(2) - 0 - \arctan(0) + C = C = 1$$

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie jene Bereiche, für die das Potential definiert ist.

Der Logarithmus darf nur positive Argumente haben, weswegen $z > 0$ gelten muss. Der Definitionsbereich lautet somit

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

c) (1 Punkt) Gegeben seien zwei Kurven zwischen den Punkten $P = (0,0,1)$ und $Q = (0,1,2)$, die wie folgt parametrisiert sind:

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}, \qquad r_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 1+s^2 \end{pmatrix},$$

mit $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$. Werden sich die Kurvenintegrale von B über $r_1(t)$ und $r_2(s)$ unterscheiden? Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie dafür Ihre Ergebnisse aus Unterpunkt b).

Beide Kurven verlaufen im Definitionsbereich D des Potentials. Deshalb sind die Kurvenintegrale wegunabhängig und Ihre Werte werden identisch sein.

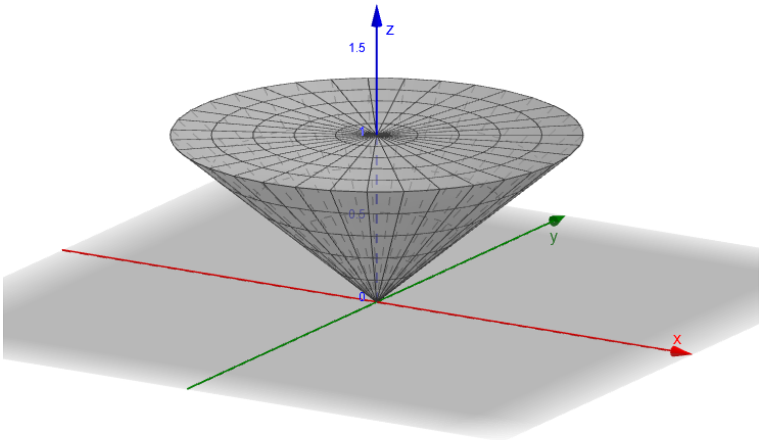
- **Aufgabe 3.**
  (2 Punkte) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+4y \\ 3y-x \\ 2x+\sqrt{z} \end{pmatrix}$$

und einen Vollkegel

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2z, \;\; 0 \leq z \leq 1\},$$

siehe Skizze.



a) Berechnen Sie den Normalvektor auf den Kegelmantel ∂M (die Berechnung des Normalvektors auf die Deckfläche ist nicht notwendig) und überprüfen Sie, ob der Normalverktor positiv orientiert ist im Bezug auf die Durchlaufrichtung der Randurve.

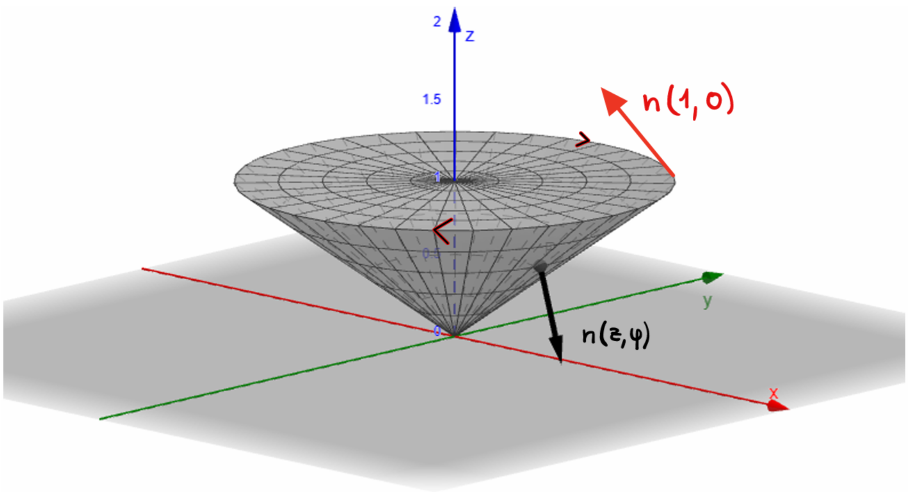
Parametrisierung von ∂M mit Zylinderkoordinaten,

$$\partial M = \left\{ \rho(z,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z\cos(\varphi) \\ 2z\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ \ 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Der Normalvektor,

$$n(z,\varphi) = \frac{\partial \rho}{\partial z} \times \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2z\sin(\varphi) \\ 2z\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z\cos(\varphi) \\ -2z\sin(\varphi) \\ 4z \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Richtung des Normalvektors,



Wir legen den Unlaufsinn auf dem Rand der Fläche als $\varphi \in [2\pi, 0]$ fest. Dann muss der Normalvektor nach außen zeigen. Dazu berechnen wir

$$n\,(1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass n in das Innere des Kegels zeigt. Wir müssen also,

$$n(z,\varphi) = \begin{pmatrix} 2z\cos(\varphi) \\ 2z\sin(\varphi) \\ -4z \end{pmatrix}$$

wählen.

b) (4 Punkte) Mit Hilfe des Satzes von Gauß berechnen Sie den Fluss von F durch die Kegeloberfläche ∂V.

Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_V \nabla \cdot F \, dV.$$

Parameterdarstellung von V

$$V(z,\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \ \ \rho \in [0,2z], \ \ \varphi \in [0,2\pi], \ \ z \in [0,1] \right\},$$

$\nabla \cdot F = 1 + 3 + \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad d(x,y,z) = \rho \, d\rho d\varphi dz \ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot F \, dV &= \int_{z=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2z} \left(4 + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) \rho \, d\rho d\varphi dz \\ &= 4\mathrm{volV} + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2z} \frac{\rho}{2\sqrt{z}} d\rho d\varphi dz \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\pi 2^2) \cdot 1 + 2\pi \int_0^1 \frac{2z^2}{2\sqrt{z}} dz = \frac{16\pi^2}{3} + 2\pi \cdot \frac{2}{5} = \frac{92\pi}{15} \end{aligned}$$