Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
Dr. Ewa B. Weinmüller

SS 2024

PRAKTISCHE MATHEMATIK II

Nachtest am 4. Juli 2024

Name	Vorname	Kennz./Matr.Nr.

1)	2)	3)	Gesamt

1. Zu minimieren ist das Integral

$$I[y] = \int_1^2 \left(\frac{16}{x} y^2 + 4xy'^2 - \frac{x^3}{3} + 2yy' \right) \, dx$$

unter der Nebenbedingung $\varphi[y] = \int_1^2 y(x)\, dx - 1 = 0$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung folgende Gestalt annimt:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = \frac{1}{8}\lambda x.$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Lösung der Euler-Lagrange Gleichung wie folgt lautet:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} - \frac{\lambda}{24} x.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = ax^n$, um zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Euler-Lagrange Gleichung zu finden. Setzen Sie die Partikulärlösung als $y(x) = bx$ an.

c) (2 Punkte) Wir suchen jene Lösung, die die Randbedigungen $y(1) = y(2) = 0$ und die Nebenbedigung $\int_1^2 y(x)\, dx = 1$ erfüllt. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das die Konstanten c_1, c_2 und λ erfüllen müssen. Sie müssen das System NICHT lösen.

2. Zu berechnen ist eine Partikulärlösung der linearen Differentialgleichung $Lu(x) = f(x)$ mit $Lu(x) = u''(x) + 3u'(x)$ und $f(x) = e^{2x}$.

   a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

   $$Lu(x) = u''(x) + 3u'(x) = 0$$

   folgende Gestalt hat:

   $$u_h(x) = A + Be^{-3x}.$$

   b) (2 Punkte) Benützen Sie das Ergebnis aus a), um einen Ansatz für die Fundamentallösung von $LU = \delta$ zu machen. Für U sollen die beiden Standardbedingungen und zusätzlich $U(x) = 0$ für alle $x < 0$ gelten.
   Zeigen Sie, dass $U(x)$ folgende Form hat:

   $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

   c) (3 Punkte) Mit der obigen Fundamentallösung U berechnen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung $Lu(x) = f(x)$ mit $f(x) = e^{2x}$ mit Hilfe von

   $$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) f(x - \xi) d\xi, \text{ bzw. } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

3. (6 Punkte) Berechnen Sie die beiden Seiten des Satzes von Green anhand des Integrals

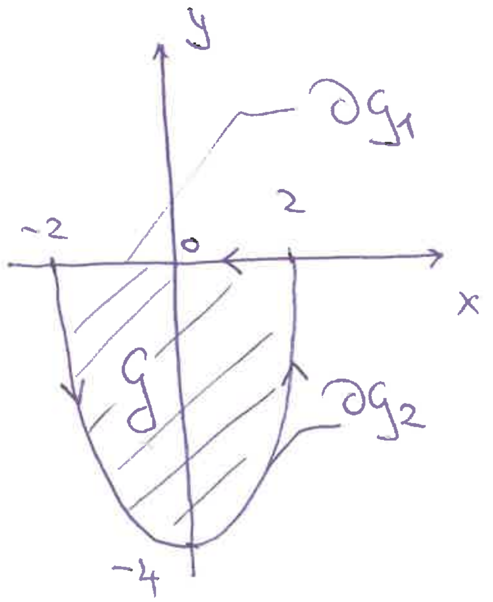
   $$\int_{\partial G} (3xy + 1)\, dx \;+\; (5x^2 + x)\, dy.$$

   Die Randkurve ∂G besteht aus zwei Kurvenstücken:

   $$\partial G_1 = \{(x, 0),\, x \in [2, -2]\}$$

   und

   $$\partial G_2 = \{(x, y),\; y = x^2 - 4,\, x \in [-2, 2]\}.$$



Lösungen

1)a) $F(x,y,y',\lambda) = \frac{16}{x}y^2 + 4xy'^2 - \frac{x^3}{3} + 2yy' + \lambda y$

ELGl: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(8xy' + 2y\right) = \frac{32}{x}y + 2y' + \lambda$

$$\Rightarrow \quad 8xy'' + 8y' + \cancel{2y'} = \frac{32}{x}y + \cancel{2y'} + \lambda \Leftrightarrow$$

$$x^2y'' + xy' - 4y = \lambda\frac{x}{8}$$

b) HGl: $0 = x^2y'' + xy' - 4y$, $y := ax^n \Rightarrow$

$$0 = \cancel{a}n(n-1)\cancel{x^n} + \cancel{a}n\cancel{x^n} - 4\cancel{a}\cancel{x^n} \Leftrightarrow$$

$$0 = n^2 \cancel{-n} \cancel{+n} - 4 \Leftrightarrow n_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow$$

$$y_h(x) = a_1x^2 + a_2x^{-2}$$

IGl: $x^2y'' + xy' - 4y = \lambda\frac{x}{8}$, $y := bx \Rightarrow$

$$bx - 4bx = \lambda\frac{x}{8} \Rightarrow b = -\frac{\lambda}{24}$$

$$\Rightarrow y_i(x) = -\frac{\lambda}{24}x.$$

$$\Rightarrow y(x) = a_1x^2 + a_2x^{-2} - \frac{\lambda}{24}x$$

c) $y(1) = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 - \frac{\lambda}{24} = 0$

$y(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{\lambda}{12} = 0$

$$1 = \int_1^2 y(x)\,dx = \frac{a_1}{3}(8-1) - a_2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{\lambda}{24}\cdot\frac{(2^2-1)}{2} = \frac{7}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{3\lambda}{48} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{3\lambda}{48} = 1$$

2a) $u''(x) + 3u'(x) = 0, \; u(x) := e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2} = \{0, -3\}$

$\Rightarrow \underline{u(x) = A + Be^{-3x}}$

b) $$\mathcal{U}(x) := \begin{cases} A_- + B_- e^{-3x}, & x<0, \\ A_+ + B_+ e^{-3x}, & x>0. \end{cases}$$

- $\mathcal{U}(x) = 0 \; \forall x<0 \Rightarrow A_- = B_- = \emptyset$
- $\mathcal{U}(0+) = \mathcal{U}(0-) \Rightarrow 0 = A_+ + B_+ \Rightarrow A_+ = -B_+ =: A \Rightarrow$

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ A - Ae^{-3x}, & x>0, \end{cases} \Rightarrow \mathcal{U}'(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ +3Ae^{-3x}, & x>0 \end{cases}$$

- $\mathcal{U}'(0+) - \mathcal{U}'(0-) = 1 \Rightarrow +3A - 0 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x}, & x>0. \end{cases}$$

c) $$\underline{u(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\xi) f(x-\xi)\, d\xi = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\xi}\right) e^{2(x-\xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\int_0^{\infty} e^{-2\xi}\, d\xi - \frac{1}{3}e^{2x}\int_0^{\infty} e^{-5\xi}\, d\xi = \frac{1}{3}e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty}$$

$$- \frac{1}{3}e^{2x}\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-5\xi}\Big|_0^{\infty} = \left(-\frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{15}(-1)\right)e^{2x} = \frac{5-2}{30}e^{2x}$$

$$= \frac{3}{30}e^{2x} = \underline{\frac{1}{10}e^{2x}}$$

<u>Probe:</u> $u''(x) + 3u'(x) = \frac{4}{10}e^{2x} + \frac{6}{10}e^{2x} = e^{2x}$ ✓

3) $$\lambda = \int_{\partial G} \underbrace{(3xy+1)}_{a_x}dx + \underbrace{(5x^2+x)}_{a_y}dy = \iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) d(x,y) = R$$

$$R = \int_{-2}^{2}\int_{x^2-4}^{0} (10x+1-3x)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} (7x+1)\,y\Big|_{x^2-4}^{0} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (7x+1)(4-x^2)\,dx = \int_{-2}^{2} (\underbrace{28x - 7x^3}_{\text{ungerade}} + 4 - x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}\cdot 16 = \frac{32}{3}$$

$$\lambda = \int_{\partial G} = \int_{\partial G_1} + \int_{\partial G_2}$$

$$\int_{\partial G_1} a\cdot dr = \int_{2}^{-2} dx = -4$$

$$\partial G_1 := \left\{ r = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ dr = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in [2,-2] \right\}$$

$$\int_{\partial G_2} a\cdot dr = \int_{-2}^{2} (3x(x^2-4)+1)\,dx + \int_{-2}^{2} (5x^2+x)\,2x\,dx =$$

$$\partial G_2 := \left\{ r = \begin{pmatrix} x \\ x^2-4 \end{pmatrix},\ dr = \begin{pmatrix} dx \\ 2x\,dx \end{pmatrix},\ x \in [-2,2] \right\}$$

$$= \int_{-2}^{2} (\underbrace{3x^3 - 12x}_{\text{ungerade}} + 1)\,dx + \int_{-2}^{2} (\underbrace{10x^3}_{\text{ungerade}} + 2x^2)\,dx = \int_{-2}^{2} dx + \int_{-2}^{2} 2x^2\,dx$$

$$= 4 + 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4 + \frac{2}{3}\cdot 16$$

Die Summe ist $\lambda = -4 + 4 + \frac{2}{3}16 = \frac{32}{3}$