Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. A. Körner, Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2024

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2, Gruppe B (FR, 14.06.2024) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Vergessen Sie nicht, am Ende des schriftlichen Tests Ihre Ausarbeitungen sowie Ihren Ausweis mit Ihrem Smartphone/Tablett zu digitalisieren und in TUWEL hochzuladen.

• **Aufgabe 1.** Gesucht ist die Funktion $y(x)$, die das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 (-8y^2(x) + 8y(x)y'(x) - 2y'^{\,2}(x) + 9y'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} - 4\sinh x)\mathrm{d}x, \;\; y(0) = 1, \;\; y(2) = 0$$

unter der Nebenbedingung

$$\varphi[y] = \int_0^2 y(x)\mathrm{d}x = 0$$

minimiert.

a) (2 Punkte) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $y(x)$ auf.

Mit

$$h(x, y(x), y'(x)) = -8y^2(x) + 8y(x)y'(x) - 2y'^{\,2}(x) + 9y'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} - 4\sinh x + \lambda y(x)$$

berechnen wir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Das ergibt

$$\frac{d}{dx}(8y - 4y' + 9) = -16y + 8y' + \lambda$$

und schließlich

$$-y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{4}\lambda.$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Zuerst berechnen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ indem wir den Ansatz, $y_h(x) := ce^{\alpha x}$, machen. Daraus folgt $\alpha_{1,2} = \pm 2$ und

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, $y_i(x)$, machen wir den Ansatz $y_i(x) := c$ und erhalten $y_i(x) = \frac{1}{16}\lambda$. Damit ergibt sich

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{16}\lambda$$

c) (2 Punkte) Stellen Sie das System der drei linearen Gleichungen auf, aus dem die Konstanten c_1, c_2 und λ berechnet werden können. Dieses System müssen Sie NICHT lösen.

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + \frac{1}{16}\lambda = 1,$$

$$y(2) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^4 + c_2 e^{-4} + \frac{1}{16}\lambda = 0,$$

$$\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{16}\lambda\right) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}c_1 e^4 - \frac{1}{2}c_2 e^{-4} + \frac{1}{8}\lambda - \frac{1}{2}(c_1 - c_2) = 0.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben ist das Problem $Lu(x) := u''(x) - 9u(x) = \cos(x)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right), & x > 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung des Differentialoperators

$$Lu(x) := u''(x) - 9u(x)$$

ist. Führen Sie dabei folgende Schritte aus:
1. (1 Punkt) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Lu(x) = 0$ an.
2. (1 Punkt) Machen Sie einen geeigneten Ansatz für $U(x)$, $LU = \delta$.
3. (2 Punkte) Berechnen Sie $U(x)$. Zusätzlich zu den Standardbedingungen soll auch die Bedingung $U(x) = 0$ für alle $x < 0$ gelten.

1. Mit dem Ansatz $u(x) = ce^{\alpha x}$ ergibt sich $\alpha_{1,2} = \pm 3$ und damit die Lösung von $Lu = 0$,

$$u(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}.$$

2. Der Ansatz für U, mit $LU = \delta$ lautet

$$U''(x) - 9U(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

und damit

$$U(x) = \begin{cases} A_- e^{3x} + B_- e^{-3x}, & x < 0, \\ A_+ e^{3x} + B_+ e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

- Aus $U(x) = 0$ für alle $x < 0$ folgt $A_- = B_- = 0$.
- Stetigkeit an $x = 0$:

$$U(0+) = U(0-) = 0 \Rightarrow A_+ + B_+ = 0 \Rightarrow A_+ = -B_+ =: A.$$

  Damit gilt

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ae^{3x} - Ae^{-3x}, & x > 0, \end{cases} \Rightarrow U'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 3Ae^{3x} + 3Ae^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

- Sprung in der 1. Ableitung:

$$U'(0+) - U'(0-) = 1 \Rightarrow 6A - 0 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

Insgesamt lautet die Fundamentallösung,

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie eine Partikulärlösung von

$$Lu(x) = u''(x) - 9u(x) = f(x) = \cos(x)$$

aus einem Ansatz der Form $u(x) := a\sin(x) + b\cos(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, und werten Sie die Lösung an der Stelle $x = 0$ aus.
Es ist klar, dass die Faltungsformel zur Berechnung von $u(x)$ nicht geeignet ist. Wenden Sie die Faltungsformel

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

trotzdem an und identifizieren Sie die unbeschränkten Terme.

Hinweis:

$$\int e^{\alpha x} \cos(x)\ dx = \frac{1}{\alpha^2+1} e^{\alpha x} (\alpha \cos(x) + \sin(x))$$

Mit dem Ansatz

$$u(x) := a\sin(x) + b\cos(x)$$

ergibt sich

$$u''(x) - 9u(x) := (-10a)\sin(x) + (-10b)\cos(x) = \cos(x),$$

woraus $a = 0$, $b = -\frac{1}{10}$ und $u(x) := -\frac{1}{10}\cos(x)$ folgt.

Wendet man die Faltungsformel an, so ergibt sich für

$$U(x-\xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi, \\ \frac{1}{6}\left(e^{3(x-\xi)} - e^{-3(x-\xi)}\right) 0, & x > \xi, \end{cases}$$

$$u(x) = (U * \cos)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\cos(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{6}\left(e^{3(x-\xi)} - e^{-3(x-\xi)}\right)\cos(\xi)\, d\xi$$
$$= \frac{e^{3x}}{6}\left(\frac{1}{10}e^{-3\xi}(-3\cos(\xi) + \sin(\xi))\right) - \frac{e^{-3x}}{6}\left(\frac{1}{10}e^{3\xi}(3\cos(\xi) + \sin(\xi))\right)\Bigg|_{-\infty}^{x}$$

Wertet man an x aus, so ergibt sich (die richtige Lösung),

$$\frac{1}{60}(-3\cos(x) + \sin(x) - 3\sinh(x) - \sin(x)) = -\frac{1}{10}\cos(x).$$

Der erste Term ist für $\xi = -\infty$ unbeschränkt. Der zweite Ausdruck verschwindet für $\xi = -\infty$.
Schließlich gilt $u(0) = -\frac{1}{10}$.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x)\,,$$

definiert durch

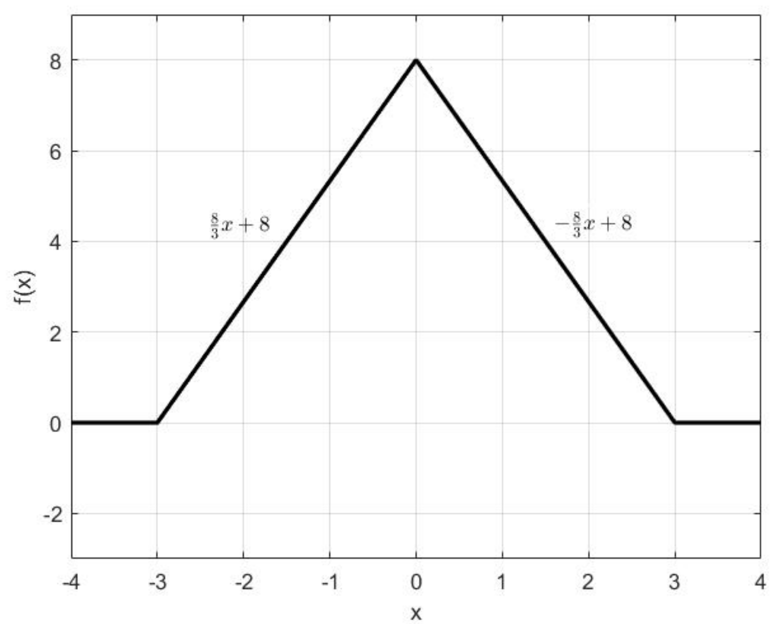
$$f(x) = \begin{cases} \min\left\{-\frac{8}{3}x + 8, \frac{8}{3}x + 8\right\}, & x \in [-3,3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) (1 Punkt) Machen Sie eine Skizze und zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x + 8, & x \in [-3,0]\,, \\ -\frac{8}{3}x + 8, & x \in [0,3]\,, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gilt.

Da für negative x-Werte die Funktion $\frac{8}{3}x + 8$ den kleineren Wert annimmt, und umgekehrt für positive x-Werte, schaut die Funktion folgendermaßen aus.



b) (1 Punkt) Überprüfen Sie durch explizite Rechnung, dass die Fouriertransformierte der oben definierten Funktion existiert.

Die Fouriertransformierte existiert, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt. Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= 8\int_{-3}^{0}\left(\frac{x}{3}+1\right)\,\mathrm{d}x + 8\int_{0}^{3}\left(-\frac{x}{3}+1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -12 + 24 - 12 + 24 = 24\end{aligned}$$

c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$ von $f(x)$ in zwei Schritten und geben Sie den Wert $\hat{f}(\pi/6)$ an.

- Leiten Sie die Form
$$\hat{f}(k) = 16 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cos(kx)\, \mathrm{d}x$$
her indem Sie das Integral von dem Intervall $[-3, 0]$ auf das Intervall $[0, 3]$ transformieren.
- Berechnen Sie daraus $\hat{f}(k)$ und $\hat{f}(\pi/6)$.

Es gilt
$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x + 8, & x \in [-3, 0], \\ -\frac{8}{3}x + 8, & x \in [0, 3], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt
$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\ &= 8 \int_{-3}^{0} \left(\frac{x}{3} + 1\right) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x + 8 \int_0^3 \left(-\frac{x}{3} + 1\right) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\ &\overset{subst.}{=} 8 \int_3^0 -\left(1 - \frac{y}{3}\right) e^{iky}\, \mathrm{d}y + 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\ &\overset{y:=x}{=} 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \mathrm{d}x = 16 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cos(kx)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir partiell,
$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &\overset{\text{PI}}{=} \frac{16}{k} \sin(kx)|_0^3 - \frac{16x}{3k} \sin(kx)|_0^3 + \frac{16}{3k} \int_0^3 \sin(kx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{16}{3k^2} \left(1 - \cos(3k)\right). \end{aligned}$$

Schließlich,
$$\hat{f}(\pi/6) = \frac{192}{\pi^2}.$$