Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Nachtest (Fr, 23.07.2021) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Skalarfeldes $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das durch

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 24x + y^3 - 12y$$

gegeben ist. *a): 3 P.*

Man erhält die stationären Punkte durch lösen des folgenden Gleichungssystems:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6x - 24 \\ 3y^2 - 12 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Es ergeben sich 4 stationäre Punkte:

$$P1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums die Definitheit der Hesse Matrix an den stationären Punkten, um welchen Typ von Punkt es sich daher handelt (z.B. elliptisch,..) und ob es sich um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. *b): 3 P.*

Man kann diese Aufgabe mittels Hauptminorenkriterium lösen oder man liest die Eigenwerte der Hesse-Matrix ab.

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$P1: Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$
$$P2: Hf(2,-2) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$
$$P3: Hf(-4,2) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$
$$P4: Hf(-4,-2) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix von P1 ist positiv definit.
Die Hesse-Matrizen von P2 und P3 sind indefinit.
Die Hesse-Matrix von P4 ist negativ definit.

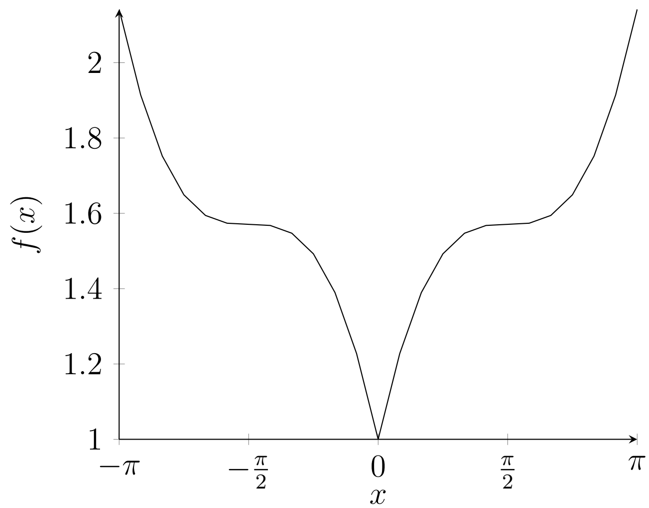
Somit sind P1 und P4 sind elliptische Punkte, P2 und P3 hyperbolische.
P1 ist ein Minimum, P4 ein Maximum. P2 und P3 sind Sattelpunkte.

- **Aufgabe 2.**

a) (3,5 Punkte) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \cos(x) + |x|, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

in eine trigonometrische Fourierreihe.



Hinweise:

$$\int \cos(x)\cos(kx)dx = \frac{k\cos(x)\sin(kx) - \sin(x)\cos(kx)}{k^2 - 1}, \quad \text{für } k \neq 1$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x) + x), \quad \text{für } k = 1$$

Da f eine gerade Funktion ist fallen die Koeffizienten $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) weg.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos(x))dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \pi$$

Der Fall $k \neq 1$ liefert die folgende Berechnung:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(x)+x)\cos(kx)dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(x)\cos(kx) + x\cos(kx)]dx$$

Separate Betrachtung der Integrale liefert folgende Ergebnisse:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\cos(kx)dx \overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\frac{k\cos(x)\sin(kx) - \sin(x)\cos(kx)}{k^2-1}\right)_0^{\pi} = 0$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx) \overset{\text{PI}}{=} -\frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi)-1) = \frac{2}{\pi}\begin{cases}0, & k \text{ gerade}\\ -\frac{2}{k^2}, & k \text{ ungerade}\end{cases}$$

Ersetzen von k durch $2n+1$ liefert folgende Koeffizienten a_{2n+1} für $n \geq 1$.

$$a_k = a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}, \quad n \geq 1$$

Der Fall $k = 1$ liefert die folgende Berechnung:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos^2(x) + x\cos(x)]dx =$$
$$\overset{\text{PI}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(x)\sin(x) + x\right)_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}(-2) = 1 - \frac{4}{\pi}$$

$$f_{fourier}(x) = \frac{\pi}{2} + (1-\frac{4}{\pi})\cos(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$$

b) (1 Punkt) Untersuchen Sie diese Fourierreihe nun auf punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz sowie Konvergenz bezüglich der L^2-Norm.

(a) Konvergenz bezüglich L^2Norm: Aus $f \in L^2(-\pi, \pi)$ folgt die Konvergenz der Fourierreihe im Quadratmittel.

(b) Gleichmäßige Konvergenz: Da f stetig differenzierbar $\forall x \setminus \{m\pi\}, \quad m \in \mathbb{Z}$ und stetig $\forall x$ ist, konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

(c) Punktweise Konvergenz: Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

c) (1,5 Punkte) Nutzen Sie nun das Ergebnis aus a) um einen Wert für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

zu berechnen.

Unter Verwendung der Parseval'schen Gleichung ergibt sich die folgende Lösung.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \cos(x))^2 dx =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 + 2x\cos(x) + \cos^2(x))dx = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi^3}{3} - 4 + \frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{\pi} + 1$$

$$\frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{\pi} + 1 = \frac{\pi^2}{2} + (1 - \frac{4}{\pi})^2 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$
$$(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{\pi} + 1 - \frac{\pi^2}{2} - 1 + \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2})\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$
$$\frac{\pi^2}{6}\frac{\pi^2}{16} - 1 = \frac{\pi^4}{96} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

- **Aufgabe 3.**

a) (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\Gamma \frac{z^2 - z - 2}{(z^2-4)(z^2+2iz+3)} dz, \; \Gamma = \{z : |z| = 2.5\}.$$

Geben Sie die Voraussetzungen für die Gültigkeit Ihrer Schritte an.

Wir faktorisieren Zähler

$$1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \;\rightarrow\; z_1 = 2, z_2 = -1$$

und Nenner

$$-i \pm \sqrt{-1-3} \;\rightarrow\; z_1 = i, z_2 = -3i$$

$$z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$$

und erhalten

$$\frac{z+1}{(z+2)(z-i)(z+3i)}$$

wobei 2 Pole innerhalb des Integrationsweges liegen. Da wir eine, bis auf die (endlich vielen) Pole, innerhalb des (glatten) geschlossenen Integrationsweges analytische Funktion integrieren, können wir den Cauchy'schen Residuensatz anwenden.

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{z^2 - z - 2}{(z^2-4)(z^2+2iz+3)} dz &= 2\pi i \left[\frac{-2+1}{(-2-i)(-2+3i)} + \frac{1+i}{(i+2)4i}\right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{-1}{7-4i} + \frac{1+i}{-4+8i}\right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{1-3i}{20} - \frac{7+4i}{65}\right]
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung und Auswertung der einzelnen Integrale führt zum selben Ergebnis

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\Gamma (z-1)^{-3} e^{z-1} dz,\ \Gamma = \{z : |z| = 2\}.$$

Wir betrachten die Laurentreihe.

$$\begin{aligned}\frac{e^{z-1}}{(z-1)^3} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}}{(z-1)^3} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{6}(z-1) + \dots\end{aligned}$$

Wir können das Residuum direkt ablesen und erhalten als Ergebnis des Integrals $i\pi$.