Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2024

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe A (Fr, 17.05.2024) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein! •

- **Aufgabe 1.**

Untersuchen Sie die durch die Gleichung $f(x,y,z)=0$ implizit definierte Fläche $z(x,y)$ mit

$$f(x,y,z)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)-\exp(x\cdot y\cdot z)+1\ .$$

a) (1,5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y,z)=0$ lokal um den Punkt $(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nach $z(x,y)$ aufgelöst werden kann.

Es gilt:

(i) Die Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist an (x_0,y_0,z_0) erfüllt.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

(ii) Alle partiellen Ableitungen sind um (x_0,y_0,z_0) und insbesondere für $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ stetig.

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}-yz\cdot\exp(xyz)$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}-xz\cdot\exp(xyz)$$

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}-xy\cdot\exp(xyz)$$

(iii) $\frac{\partial f}{\partial z}$ ist am Punkt (x_0,y_0,z_0) ungleich 0, daher ist die partielle Jacobimatrix $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$ invertierbar.

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) (4,5 Punkte) Finden Sie für $z(x,y)$ unter Benutzung der Gleichung $f(x,y,z(x,y)) = 0$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Die benötigten partiellen Ableitungen sind

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} - yz \cdot \exp(xyz)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} - xz \cdot \exp(xyz)$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} - xy \cdot \exp(xyz)$$

und für die Stelle (x_0, y_0, z_0) gilt

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Durch implizites Differenzieren erhält man

$$f(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y,z(x,y)) = f_x + f_z \cdot z_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x,y,z(x,y)) = f_y + f_z \cdot z_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla z(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und für das Taylorpolynom 1. Grades $T_1(x,y)$ um die Stelle (x_0, y_0) ergibt sich

$$T_1(x,y) = z(x_0,y_0) + \nabla z(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{y}{\sqrt{2}}\,.$$

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei eine Funktion $f(x,y)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 3y^3 - y^2 + 2x^2 + 1 \, .$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ sowie die Hessematrix $H(x,y)$ von $f(x,y)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 9y^2 - 2y \end{pmatrix}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 18y - 2 \end{pmatrix}$$

b) (2 Punkte) Verwenden Sie das Newtonverfahren, um die Lösung der Gleichung $\nabla f = (0,0)^T$ anzunähern. Benutzen Sie hierfür den Startwert $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ und berechnen Sie die Approximation der Lösung nach dem ersten Iterationsschritt.

$$H(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\nabla f(x_0,y_0)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-7}{16} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

c) (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)^T$. Um welche Arten von Punkten handelt es sich bei den Lösungen? Begünden Sie Ihre Antwort mithilfe des Gradienten und der Hessematrix.

Das Nullsetzen der Komponenten des Gradienten liefert

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0 \\ 9y_0^2 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Art der Extrema durch Berechnung der jeweiligen Hessematrix

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 18\frac{2}{9} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{positiv definit} \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x \cdot \cos^2(y) - y \cdot \sin^2(x) - x$$

und die Nebenbedingung

$$g(x,y) = x + y - 2\pi = 0\ .$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie $\nabla F(x,y,\lambda)$ mit

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)\ \ .$$

Hinweis: Es gilt $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Wir stellen die Lagrange Funktion auf,

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) = x \cdot \cos^2(y) - y \cdot \sin^2(x) - x + \lambda \cdot (x + y - 2\pi)\ \ ,$$

und differenzieren diese nach x, y und λ. Es folgt

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos^2(y) - 2y \cdot \sin(x)\cos(x) - 1 + \lambda \\ -2x \cdot \sin(y)\cos(y) - \sin^2(x) + \lambda \\ x + y - 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(y) - y \cdot \sin(2x) - 1 + \lambda \\ -x \cdot \sin(2y) - \sin^2(x) + \lambda \\ x + y - 2\pi \end{pmatrix}\ \ ,$$

wobei wir die trigonometrische Identität $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ verwendet haben.

b) (1,5 Punkte) Aus dem Gleichungssystem

$$\nabla F(x,y,\lambda) = 0$$

ergeben sich folgende Gleichungen für x und y:

$$\sin(2x) = 0\ , \quad y = 2\pi - x\ .$$

Berechnen Sie daraus die Lage der möglichen Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung g, wobei $x \in [0, 2\pi]$ und $y \geq 0$ gelten soll.

Die Gleichung $\sin(2x) = 0$ hat folgende Lösungen

$$2x = \pi \cdot n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}\ .$$

In den gegebenen Grenzen kann x also die Werte 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ und 2π annehmen. Mit der Gleichung $y = 2\pi - x$ können wir die dazugehörigen y-Werte finden, und erhalten die 5 möglichen Extremstellen,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

c) (1,5 Punkte) Entscheiden Sie welche der unter b) gefundenen Extremalstellen Minima bzw. Maxima sind. Dazu stellen Sie die Funktion $f(x, 2\pi - x)$ auf und berechnen Sie ihre 2. Ableitung.

Hinweis: Es gilt $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$.

Wir verwenden die Nebenbedingung, um y durch x auszudrücken als $y = 2\pi - x$. Die Funktion, in der Form, die wir in a) gefunden haben, wird dadurch zu

$$f(x, 2\pi - x) = x \cdot \cos^2(2\pi - x) - (2\pi - x) \cdot \sin^2(x) - x = -2\pi \cdot \sin^2(x) \ .$$

Wir können nun zwei Mal nach x ableiten,

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -4\pi \cdot \sin(x)\cos(x) = -2\pi \cdot \sin(2x)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -4\pi \cdot \cos(2x) \ ,$$

wobei wir die trigonometrische Identität $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ verwendet haben. Durch Einsetzen der x-Werte aus (b) erkennt man, dass E_1, E_3 und E_5 Maxima sind (negative Krümmung), und E_2 und E_4 Minima (positive Krümmung).

d) (2 Punkte) Beweisen Sie die Aussage, die unter b) formuliert ist.

Hinweis: Es gilt $\sin(4\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.

Es gilt

$$f(x, y) = x \cdot \cos^2(y) - y \cdot \sin^2(x) - x \ .$$

Daraus folgt

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \begin{cases} \cos^2(y) - y \cdot \sin(2x) - 1 + \lambda = 0, \\ -x \cdot \sin(2y) - \sin^2(x) + \lambda = 0, \\ x + y - 2\pi = 0. \end{cases}$$

Wir bilden die Differenz der ersten beiden Zeilen und erhalten

$$\cos^2(y) - y \cdot \sin(2x) - 1 + x \cdot \sin(2y) + \sin^2(x) = 0 \ .$$

Nun setzten wir die dritte Gleichung, $y = 2\pi - x$, ein

$$\cos^2(2\pi - x) - (2\pi - x) \cdot \sin(2x) - 1 + x \cdot \sin(4\pi - 2x) + \sin^2(x) = 0$$
$$\Rightarrow \cos^2(x) - 2\pi \cdot \sin(2x) + x \cdot \sin(2x) - 1 - x \cdot \sin(2x) + \sin^2(x) = 0 \ .$$

Mit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ kürzen sich einige Terme weg, und wir erhalten

$$-2\pi \cdot \sin(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0 \ .$$

Das heißt,

$$\sin(2x) = 0 \ , \quad y = 2\pi - x \ . \quad \square$$