Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2024

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe A (Fr, 21.06.2024) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein! •

- **Aufgabe 1.**

a) (3,5 Punkte) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x, & x \in [-\pi, 0) \\ -x^2 + \pi x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

in eine trigonometrische Fourierreihe.

Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften der Integranden, um die auftretenden Integrale möglichst einfach zu halten.

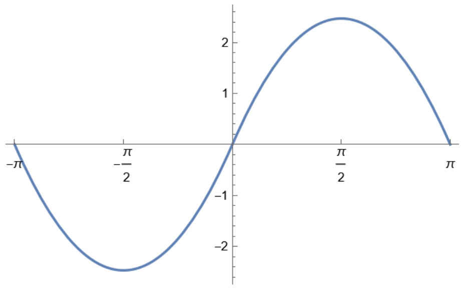

Abbildung 1: $f(x)$

Da f ungerade ist, fallen die Koeffizienten $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) sowie a_0 weg. Es bleibt die Berechnung der Koeffizienten b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) \sin(kx)\, dx$$

Doppelte partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left[-(-x^2 + \pi x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (-2x + \pi) \frac{\cos(kx)}{k}\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 + (-2x + \pi) \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2 \frac{\sin(kx)}{k^2}\, dx \right] \\ &\overset{\sin(k\pi)=0}{=} \frac{2}{\pi} \left[0 - 2 \frac{\cos(kx)}{k^3} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{k^3} - \frac{\cos(k\pi)}{k^3} \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^3} (-1)^k \right] \end{aligned}$$

Die Koeffizienten b_k verschwinden nur für ungerade k nicht, weshalb sich folgende Vereinfachung ergibt:

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{8}{\pi k^3}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \qquad \overset{k \to 2k-1}{\Rightarrow} \qquad b_{2k-1} = \frac{8}{\pi (2k-1)^3}$$

Somit lautet die trigonometrische Fourierreihe:

$$f_{\text{Fourier}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

b) (1,5 Punkte) Untersuchen sie diese Fourierreihe auf (i) Konvergenz bezüglich der L^2-Norm, (ii) gleichmäßige Konvergenz und (iii) punktweise Konvergenz.

(i) Konvergenz bezüglich der L^2-Norm: Aus $f \in L^2(-\pi, \pi)$ folgt die Konvergenz der Fourierreihe im Quadratmittel.

(ii) Gleichmäßige Konvergenz: Da f stetig, 2π-periodisch und stetig differenzierbar $\forall\, x \setminus \{0,\, n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}$ ist, konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

(iii) Punktweise Konvergenz: Folgt aus gleichmäßiger Konvergenz.

c) (1 Punkt) Nach a) ergibt sich die trigonometrische Fourierreihe der Funktion $f(x)$ zu:

$$f_{\text{Fourier}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis, um die Fourierreihe der Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$, $g(x) = \pi - 2\,|x|$ zu berechnen.

Da die Funktion $g(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist, kann die Fourierreihe $g_{\text{Fourier}}(x)$ aufgrund der punktweisen Konvergenz von $f_{\text{Fourier}}(x)$ über gliedweise Differentiation bestimmt werden:

$$g_{\text{Fourier}}(x) = f'_{\text{Fourier}}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

Die Reihe $g_{\text{Fourier}}(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $g(x)$.

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei die komplexwertige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = ze^z$$

wobei $z = x + iy$.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie den Real- sowie Imaginärteil dieser Funktion.

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)e^{x+iy} \\ &= (x+iy)e^x e^{iy} \\ &= (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) \\ &= e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + ie^x\left(y\cos y + x\sin y\right) \end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Überprüfen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen die Funktion auf Differenzierbarkeit im gesamten Definitionsbereich.

Aufgrund der offensichtlichen stetigen Differenzierbarkeit des Real- und Imaginärteils im gesamten Definitionsbereich soll lediglich

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} f &= \partial_y \operatorname{Im} f \\ \partial_y \operatorname{Re} f &= -\partial_x \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

gezeigt werden. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} f &= e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + e^x\cos y \\ \partial_y \operatorname{Im} f &= e^x\left(x\cos y - y\sin y + \cos y\right) \\ \partial_y \operatorname{Re} f &= e^x\left(-x\sin y - y\cos y - \sin y\right) \\ \partial_x \operatorname{Im} f &= e^x\left(y\cos y + x\sin y\right) + e^x\sin y \end{aligned}$$

Der Vergleich der Gleichungen liefert das Ergebnis.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{i\pi} ze^z dz$$

als Kurvenintegral entlang der Kurve

$$z(t) = it, \quad t \in [0, \pi].$$

Zeigen Sie zudem, dass das Ergebnis mit der Berechnung über die Stammfunktion übereinstimmt.

Hinweis:

$$\int t\sin t dt = -t\cos t + \sin t + C$$

$$\int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + C$$

Es gilt

$$z(t) = x(t) + iy(t) = it \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0,\ y(t) = t$$

sowie

$$dz = \dot{z}dt = idt$$

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (-t\sin t + it\cos t)\, idt \\ &= -\int_0^\pi t\cos t dt - i\int_0^\pi t\sin t dt \end{aligned}$$

Mit den Stammfunktionen

$$\int t\sin t dt = -t\cos t + \sin t + C$$
$$\int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + C$$

ergibt die Rechnung schließlich

$$I = 2 - i\pi$$

Der direkte Weg über die Stammfunktion lautet

$$\int ze^z dz = e^z(z-1) + C$$

und durch Einsetzen der Grenzen 0 und $i\pi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= e^{i\pi}(i\pi - 1) - e^0(-1) \\ &= 2 - i\pi \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

Sei M ein Unterraum des Hilbertraums $L^2([-\pi,\pi])$ der quadratisch integrierbaren Funktionen, aufgespannt durch die zwei Funktionen u_1, u_2:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(4x).$$

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Formeln für die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x$$

aus dem Skriptum.

a) (3,5 Punkte) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für M.

$$u_1 = 1$$

Berechne die Norm $\|u_1\|_2$

$$\|u_1\|_2 = \sqrt{\langle u_1, u_1\rangle_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi}$$

Nun können wir ϕ_1 angeben:

$$\phi_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Berechne $\tilde{\phi}_2$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens:

$$\tilde{\phi}_2 = u_2 - \langle u_2, \phi_1\rangle_2\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(3\cos(2x) + \sin(4x)\Big) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(3\cos(2x) + \sin(4x)\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(3\cos(2x) + \sin(4x)\Big) - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left[\frac{3\sin(2x)}{2} - \frac{\cos(4x)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(3\cos(2x) + \sin(4x)\Big).$$

Berechne die Norm um anschließend normieren zu können:

$$\left\|\tilde{\phi}_2\right\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big(3\cos(2x) + \sin(4x)\Big)^2\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(9\cos(2x)^2 + 6\cos(2x)\sin(4x) + \sin(4x)^2\Big)\mathrm{d}x}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 9\cos(2x)^2\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} 6\cos(x)\sin(4x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(4x)^2\mathrm{d}x\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(9\pi + \pi\Big)} = \sqrt{5\pi}.$$

Nun können wir ϕ_2 angeben:

$$\phi_2 = \frac{\tilde{\phi}_2}{\left\|\tilde{\phi}_2\right\|_2} = \frac{3\cos(2x) + \sin(4x)}{\sqrt{10\pi}}.$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Funktion $f \in M$, die die Funktion $y(x) = 4\sin(x) + 1$ im Sinne der $\|.\|_2$-Norm am besten approximiert.

Die Projektion von der Funtion $y(x) = 4\sin(x) + 1$ auf M lautet.

$$f(x) = \langle 4\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 \phi_1 + \langle 4\sin(x) + 1, \phi_2 \rangle_2 \phi_2.$$

$$\langle 4\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(4\sin(x) + 1 \Big) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-4\cos(x) + x \Big]_{-\pi}^{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\begin{aligned} \langle 4\sin(x) + 1, \phi_2 \rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(4\sin(x) + 1 \Big) \Big(3\cos(2x) + \sin(4x) \Big) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(12\sin(x)\cos(2x) + 4\sin(x)\sin(4x) + 3\cos(2x) + \sin(4x) \Big) \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

$$f(x) = \langle 4\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 \phi_1 = 1.$$

c) (0,5 Punkt) Berechnen Sie die Norm des Fehlers der Bestapproximation f zum Original y.

Der Fehler ist gegeben durch:

$$\|y - f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(4\sin(x)\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{16\pi} = 4\sqrt{\pi}.$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2024

A N A L Y S I S   I I   F Ü R   T P H,   (103.091)

Test 2 Gruppe B (Fr, 21.06.2024) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein! □

- **Aufgabe 1.**

a) (3,5 Punkte) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - \pi x, & x \in [-\pi, 0) \\ x^2 - \pi x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

in eine trigonometrische Fourierreihe.

Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften der Integranden, um die auftretenden Integrale möglichst einfach zu halten.

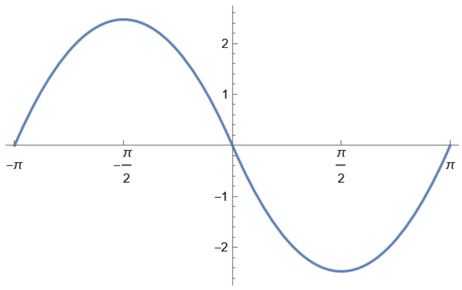

Abbildung 2: $f(x)$

Da f ungerade ist, fallen die Koeffizienten $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) sowie a_0 weg. Es bleibt die Berechnung der Koeffizienten b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x) \sin(kx)\, dx$$

Doppelte partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left[-(x^2 - \pi x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (2x - \pi) \frac{\cos(kx)}{k}\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 + (2x - \pi) \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \frac{\sin(kx)}{k^2}\, dx \right] \\ &\overset{\sin(k\pi)=0}{=} \frac{2}{\pi} \left[0 + 2 \frac{\cos(kx)}{k^3} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(k\pi)}{k^3} - \frac{1}{k^3} \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{k^3} (-1)^k - \frac{1}{k^3} \right] \end{aligned}$$

Die Koeffizienten b_k verschwinden nur für ungerade k nicht, weshalb sich folgende Vereinfachung ergibt:

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{-8}{\pi k^3}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \quad \overset{k \to 2k-1}{\Rightarrow} \quad b_{2k-1} = \frac{-8}{\pi (2k-1)^3}$$

Somit lautet die trigonometrische Fourierreihe:

$$f_{\text{Fourier}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi (2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

b) (1,5 Punkte) Untersuchen sie diese Fourierreihe auf (i) Konvergenz bezüglich der L^2-Norm, (ii) gleichmäßige Konvergenz und (iii) punktweise Konvergenz.

(i) Konvergenz bezüglich der L^2-Norm: Aus $f \in L^2(-\pi, \pi)$ folgt die Konvergenz der Fourierreihe im Quadratmittel.

(ii) Gleichmäßige Konvergenz: Da f stetig, 2π-periodisch und stetig differenzierbar $\forall\, x \setminus \{0,\, n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}$ ist, konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

(iii) Punktweise Konvergenz: Folgt aus gleichmäßiger Konvergenz.

c) (1 Punkt) Nach a) ergibt sich die trigonometrische Fourierreihe der Funktion $f(x)$ zu:

$$f_{\text{Fourier}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis, um die Fourierreihe der Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$, $g(x) = 2\,|x| - \pi$ zu berechnen.

Da die Funktion $g(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist, kann die Fourierreihe $g_{\text{Fourier}}(x)$ aufgrund der punktweisen Konvergenz von $f_{\text{Fourier}}(x)$ über gliedweise Differentiation bestimmt werden:

$$g_{\text{Fourier}}(x) = f'_{\text{Fourier}}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

Die Reihe $g_{\text{Fourier}}(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $g(x)$.

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei die komplexwertige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = ze^{-iz}$$

wobei $z = x + iy$.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie den Real- sowie Imaginärteil dieser Funktion.

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)e^{-i(x+iy)} \\ &= (x+iy)e^{-ix}e^{y} \\ &= (x+iy)e^{y}(\cos x - i\sin x) \\ &= e^{y}\left(x\cos x + y\sin x\right) + ie^{y}\left(y\cos x - x\sin x\right) \end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Überprüfen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen die Funktion auf Differenzierbarkeit im gesamten Definitionsbereich.

Aufgrund der offensichtlichen stetigen Differenzierbarkeit des Real- und Imaginärteils im gesamten Definitionsbereich soll lediglich

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} f &= \partial_y \operatorname{Im} f \\ \partial_y \operatorname{Re} f &= -\partial_x \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

gezeigt werden. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} f &= e^{y}\left(\cos x - x\sin x + y\cos x\right) \\ \partial_y \operatorname{Im} f &= e^{y}\left(y\cos x - x\sin x\right) + e^{y}\cos x \\ \partial_y \operatorname{Re} f &= e^{y}\left(x\cos x + y\sin x\right) + e^{y}\sin x \\ \partial_x \operatorname{Im} f &= e^{y}\left(-y\sin x - \sin x - x\cos x\right) \end{aligned}$$

Der Vergleich der Gleichungen liefert das Ergebnis.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{\pi} ze^{-iz}dz$$

als Kurvenintegral entlang der Kurve

$$z(t) = t, \quad t \in [0, \pi].$$

Zeigen Sie zudem, dass das Ergebnis mit der Berechnung über die Stammfunktion übereinstimmt.

Hinweis:

$$\begin{aligned} \int t\sin t dt &= -t\cos t + \sin t + C \\ \int t\cos t dt &= t\sin t + \cos t + C \end{aligned}$$

Es gilt

$$z(t) = x(t) + iy(t) = t \quad \Rightarrow \quad x(t) = t,\ y(t) = 0$$

sowie

$$dz = \dot{z}dt = dt$$

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (t\cos t - it\sin t)\, dt \\ &= \int_0^\pi t\cos t dt - i \int_0^\pi t\sin t dt \end{aligned}$$

Mit den Stammfunktionen

$$\int t\sin t dt = -t\cos t + \sin t + C$$
$$\int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + C$$

ergibt die Rechnung schließlich

$$I = -2 - i\pi$$

Der direkte Weg über die Stammfunktion lautet

$$\int z e^{-iz} dz = e^{-iz}(iz + 1) + C$$

und durch Einsetzen der Grenzen 0 und $i\pi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= e^{-i\pi}(i\pi + 1) - e^0 \\ &= -2 - i\pi \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

Sei M ein Unterraum des Hilbertraums $L^2([-\pi,\pi])$ der quadratisch integrierbaren Funktionen, aufgespannt durch die zwei Funktionen u_1, u_2:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x).$$

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Formeln für die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x$$

aus dem Skriptum.

a) (3,5 Punkte) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für M.

$$u_1 = 1$$

Berechne die Norm $\|u_1\|_2$

$$\|u_1\|_2 = \sqrt{\langle u_1, u_1\rangle_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi}$$

Nun können wir ϕ_1 angeben:

$$\phi_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Berechne $\tilde{\phi}_2$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2 = u_2 - \langle u_2, \phi_1\rangle_2 \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\cos(x) + \sin(2x)\Big) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\cos(x)+\sin(2x)\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\cos(x)+\sin(2x)\Big) - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left[2\sin(x) - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\cos(x)+\sin(2x)\Big).\end{aligned}$$

Berechne die Norm um anschließend normieren zu können:

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\phi}_2\right\|_2 &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big(2\cos(x)+\sin(2x)\Big)^2\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(4\cos(x)^2 + 4\cos(x)\sin(2x) + \sin(2x)^2\Big)\mathrm{d}x} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}4\cos(x)^2\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}4\cos(x)\sin(2x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)^2\mathrm{d}x\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(4\pi+\pi\Big)} = \sqrt{\frac{5\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Nun können wir ϕ_2 angeben:

$$\phi_2 = \frac{\tilde{\phi}_2}{\left\|\tilde{\phi}_2\right\|_2} = \frac{2\cos(x)+\sin(2x)}{\sqrt{5\pi}}.$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Funktion $f \in M$, die die Funktion $y(x) = 2\sin(x) + 1$ im Sinne der $\|.\|_2$-Norm am besten approximiert.

Die Projektion von der Funtion $y(x) = 2\sin(x) + 1$ auf M lautet.

$$f(x) = \langle 2\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 \phi_1 + \langle 2\sin(x) + 1, \phi_2 \rangle_2 \phi_2.$$

$$\langle 2\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\sin(x) + 1)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-2\cos(x) + x \Big]_{-\pi}^{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\begin{aligned}
\langle 2\sin(x) + 1, \phi_2 \rangle_2 &= \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(2\sin(x) + 1 \Big) \Big(2\cos(x) + \sin(2x) \Big) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\sin(2x) + 2\cos(x) + \sin(2x) \Big) \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

$$f(x) = \langle 2\sin(x) + 1, \phi_1 \rangle_2 \phi_1 = 1.$$

c) (0,5 Punkt) Berechnen Sie die Norm des Fehlers der Bestapproximation f zum Original y.

Der Fehler ist gegeben durch:

$$\|y - f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \Big(2\sin(x)\Big)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{4\pi} = 2\sqrt{\pi}.$$