Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
Dr. Ewa B. Weinmüller

SS 2024

ANALYSIS II FÜR TPH

Nachtest am 11. Juli 2024

Name	Vorname	Kennz./Matr.Nr.

1)	2)	3)	Gesamt

1. Gegeben sei das Skalarfeld $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix von f.

b) (2 Punkte) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(0, 0)$ an.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Um welche Art von Extrema handelt es sich.
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich.

2. Gegeben sei die Funktion f,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ -\frac{x}{2} & \text{für } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

a) (4 Punkte) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe.

b) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

3. a) (4 Punkte) Berechnen Sie $\exp(-\frac{2+i\pi}{4})$ und $(2-2i)^i$.
Hinweis: Benützen Sie den Hauptast der Logarithmusfunktion.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\oint_C \frac{\sin(3z)}{z^2+4}\,\mathrm{d}z.$$

C ist ein Rechteck mit den Eckpunkten ± 3 und $\pm 3 + 4i$.

Lösungen

1) a) $f(x,y) = \sin x \sin y$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

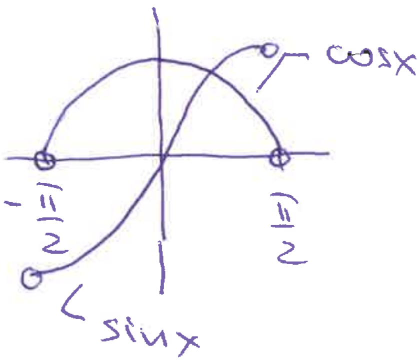
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right) \Rightarrow$$

$$x=y=0 \Rightarrow f(h,k) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot hk = hk$$



c) $\cos x \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

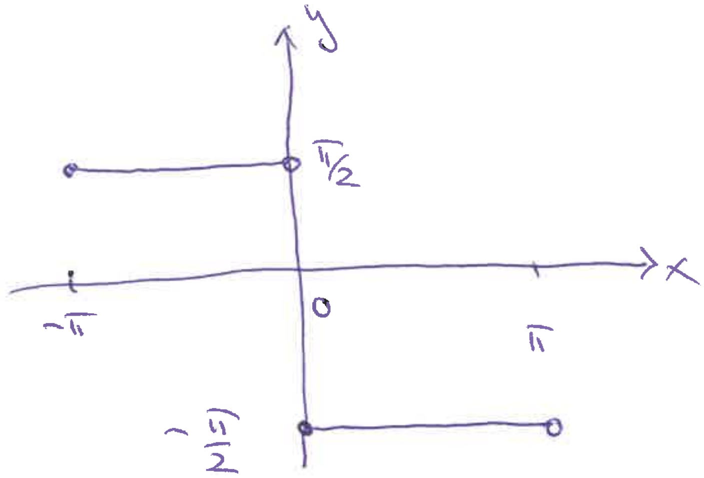
$\sin x \cos y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Det} Hf(0,0) < 0$, also die EW haben verschiedene Vorzeichen ($\lambda_{1,2} = \pm 1$).

$\Rightarrow$ Sattelpunkt in P.

2) a)



$$f(x) \text{ ist ungerade } \Rightarrow f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad \text{mit}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(kx)}_{\text{gerade}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx =$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\int_0^{\pi} -\frac{\cancel{\pi}}{2}\sin(kx)dx = -\int_0^{\pi}\sin(kx)dx = \frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{k}\Big(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=\begin{cases}1, & k \text{ gerade}\\ -1, & k \text{ ungerade}\end{cases}} - 1\Big) = \frac{1}{k}\begin{cases}1-1=0, & k \text{ gerade},\\ -1-1=-2, & k \text{ ungerade}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)$$

b) • Punktweise Konv.: $f(x)$ stetig diffbar, bis auf die Punkte $x = -\pi, 0, \pi$. Deshalb punktw. Konv. der FR an allen Stellen $x \in (-\pi,0)\cup(0,\pi)$ gegen $f(x)$.
An $x = -\pi, 0, \pi$ konv. die FR gegen Null.

3) a) $\exp\left(-\frac{2+i\pi}{4}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) =$

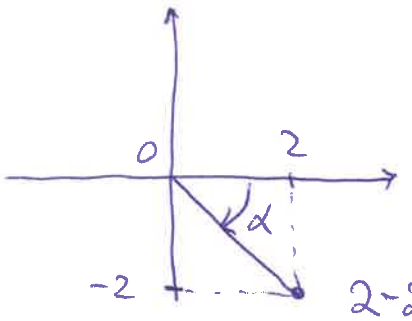
$= \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$

$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1-i)}$

$(2-2i)^i$

$z^c = \exp(c \ln z) = \exp(i \ln(2-2i))$

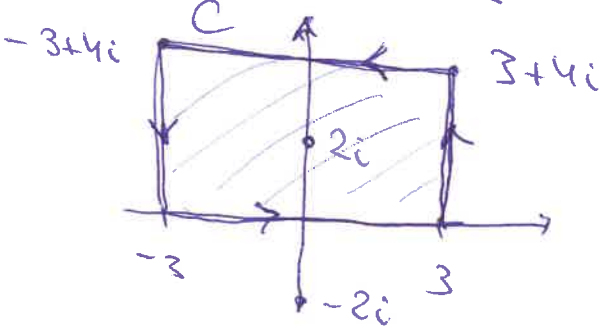
HA: $\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln\sqrt{8} - i\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$



$2-2i = z$

$\alpha = \arg z = -\frac{\pi}{4}$

$(2-2i)^i = \exp\left(i\ln\sqrt{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos(\ln\sqrt{8}) + i\sin(\ln\sqrt{8})\right)$



b) $I = \oint_C \underbrace{\frac{\sin 3z}{z^2+4}}_{=:f(z)} dz$

$z^2+4 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 2i$

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{\sin 3z}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)} \cancel{(z-2i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{\sin(6i)}{4i} = \frac{1}{2}\pi \sin 6i = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}(e^{-6} - e^{6}) =$$

$$= \frac{1}{4}\pi (e^{-6} - e^{6})$$

Nachtrag 2b)

- Keine glm. Konv. da f unstetig.