Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
Dr. Ewa B. Weinmüller

SS 2024

ANALYSIS II FÜR TPH

Nachtest am 11. Juli 2024

Name	Vorname	Kennz./Matr.Nr.

1)	2)	3)	Gesamt

1. Gegeben sei das Skalarfeld $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix von f.

b) (2 Punkte) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(0,0)$ an.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Um welche Art von Extrema handelt es sich.
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich.

2. Gegeben sei die Funktion f,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ -\frac{x}{2} & \text{für } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

a) (4 Punkte) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe.

b) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

3. a) (4 Punkte) Berechnen Sie $\exp(-\frac{2+i\pi}{4})$ und $(2-2i)^i$.
Hinweis: Benützen Sie den Hauptast der Logarithmusfunktion.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\oint_C \frac{\sin(3z)}{z^2+4}\,\mathrm{d}z.$$

C ist ein Rechteck mit den Eckpunkten ± 3 und $\pm 3 + 4i$.

Lösungen

1) a) $f(x,y) = \sin x \sin y$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

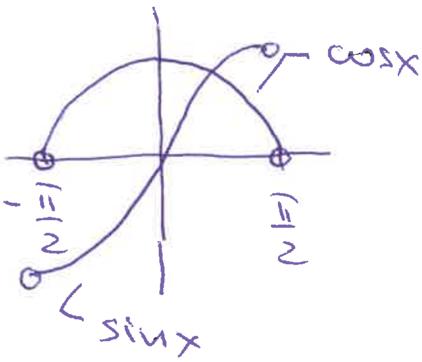
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right) \Rightarrow$$

$x=y=0 \Rightarrow f(h,k) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot hk = hk$



c) $\cos x \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\sin x \cos y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

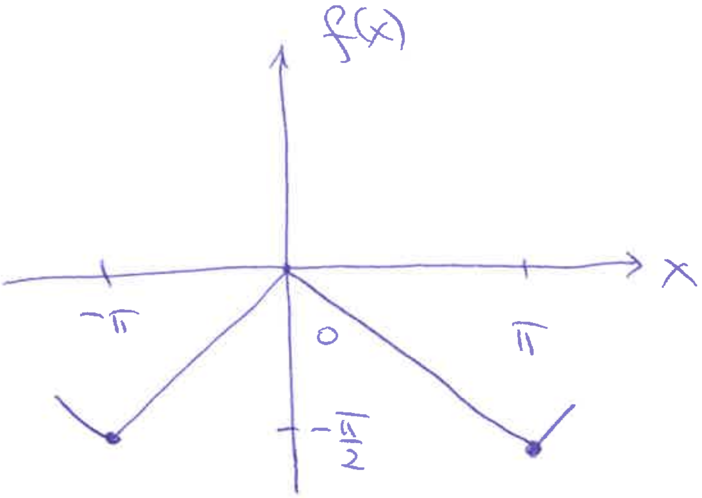
$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Det} Hf(0,0) < 0$, also die EW haben verschiedene Vorzeichen ($\lambda_{1,2} = \pm 1$).

$\Rightarrow$ Sattelpunkt in P.

Beispiel 2

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, 0), \\ -\frac{x}{2}, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$



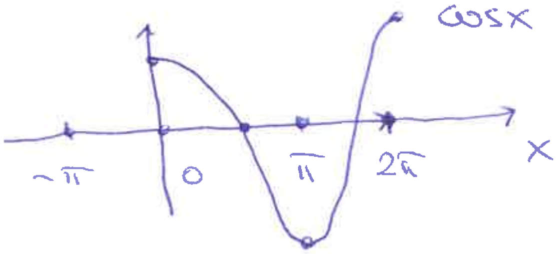
$f(x)$ ist gerade $\Rightarrow$ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(kx)}_{\text{gerade}} dx, \quad k \geq 0.$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -\frac{x}{2} \cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{kx\sin(kx) + \cos(kx)}{k^2} \right)\Bigg|_0^{\pi}, \quad k \neq 0$$

$$= -\frac{1}{\pi k^2} \left(k\pi \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \cos(k\pi) - 1 \right) = -\frac{1}{\pi k^2} \left((-1)^k - 1 \right), \; k \neq 0$$



$$\Rightarrow \underset{k \neq 0}{a_k} = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ \frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

b) • $f(x)$ ist in $[-\pi,\pi]$ stetig partiell diff bar mit den Ausnahme von 3 Punkten $-\pi, 0, \pi$ (wo die 1. Ableitung einen Sprung hat). Da f stetig ist konv. die FR punktweise gegen f in $\mathbb{R}$.

• FR konv. glm. gegen f (siehe oben).

$$3)\ a)\quad \exp\left(-\frac{2+i\pi}{4}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\pi}{4}\right)=$$

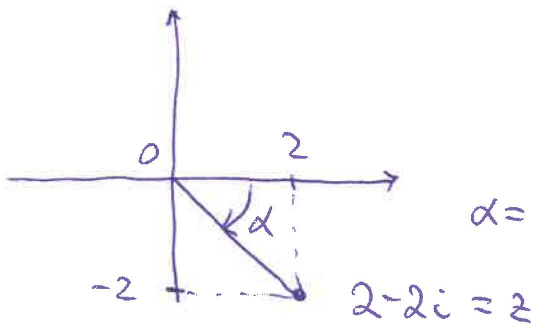
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$$

$$=\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-i)}$$

$$(2-2i)^{i}$$

$$z^{c}=\exp(c\ln z)=\exp(i\ln(2-2i))$$

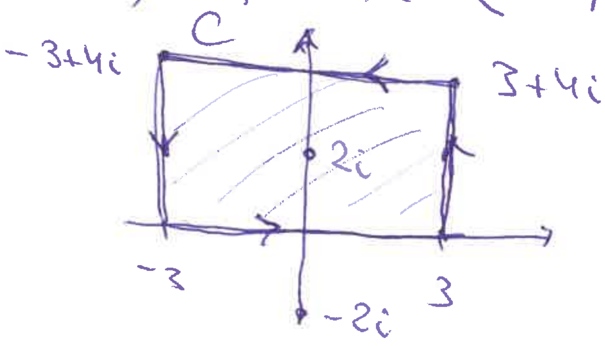
HA: $\ln z=\ln|z|+i\arg z=\ln\sqrt{8}-i\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$



$\alpha=\arg z=-\frac{\pi}{4}$

$$(2-2i)^{i}=\exp\left(i\ln\sqrt{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos(\ln\sqrt{8})+i\sin(\ln\sqrt{8})\right)$$

$$b)\quad I=\oint_{C}\underbrace{\frac{\sin 3z}{z^{2}+4}}_{=:f(z)}dz$$



$$z^{2}+4=0 \iff z_{1,2}=\pm 2i$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{\sin 3z}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)} \cancel{(z-2i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{\sin(6i)}{4i} = \frac{1}{2}\pi \sin 6i = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{-6} - e^{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}\pi\left(e^{-6} - e^{6}\right)$$