

1. UE Mathematik 3, 12.3.2014

1. Gegeben sei das durch die Geraden $x = 1, y = x$ und $y = x - 1$ begrenzte Dreieck D sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y \\ \sin \pi x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_D \operatorname{rot} \mathbf{v} dx dy$$

mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes. Berechnen Sie das Integral anschließend auch direkt. Formulieren Sie den von Ihnen verwendeten Integralsatz auch allgemein.

2. Gegeben sei der Kegel $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$. Parametrisieren Sie K sowie die Oberfläche ∂K , den Mantel M , die Randkurve ∂M des Mantels und die Deckfläche D von K . Bestimmen sie außerdem das Oberflächenelement $d\mathbf{O}$ von K .

3. Gegeben sei der Kegel aus Beispiel 2 sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ z(1 - z) - y \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den Betrag des Flusses des Vektorfelds \mathbf{v} durch die Mantelfläche M , daher

$$\iint_M \mathbf{v} d\mathbf{O}.$$

- (b) Berechnen Sie den Betrag des Flusses des Vektorfelds \mathbf{v} durch die Oberfläche ∂K , daher

$$\iint_{\partial K} \mathbf{v} d\mathbf{O}$$

mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes. Formulieren Sie diesen Satz auch allgemein.

- (c) Nutzen Sie den Gleichung $\partial K = M \dot{\cup} D$ um den Fluss von \mathbf{v} durch ∂K mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil (a) zu berechnen.

4. Gegeben sei wieder der Kegel aus Beispiel 2 sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ z(1 - z) - y \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_M \operatorname{rot} \mathbf{v} d\mathbf{O}$$

einerseits direkt und andererseits unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes.

(b) Begründen Sie warum

$$\iint_{\partial K} \operatorname{rot} \mathbf{v} d\mathbf{O} = 0$$

gilt.

5. Gegeben sei der Tetraeder $T = \{(x, y, z) : x + 2y + 5z \leq 1, x, y, z \geq 0\}$, die Seitenfläche

$$F = \{(x, y, z) : x + 2y + 5z = 1, x, y, z \geq 0\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ yz \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\iint_{\partial T} \mathbf{v} d\mathbf{O}$$

unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes.

(b) Berechnen Sie

$$\iint_F \operatorname{rot} \mathbf{v} d\mathbf{O}$$

einerseits direkt und andererseits unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes.

(c) Formulieren Sie die in (a) und (b) verwendeten Integralsätze allgemein.