2. UE Mathematik 3, 19.3.2014

1. Berechnen Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes das Kurvenintegral $\oint_C v(x(s))ds$ wobei

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$$

und C der im positiven Sinne durchlaufene Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

2. Gegeben ist die Halbkugel (östliche Hemisphäre) $H := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0\}$ sowie das Vektorfeld

$$v(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint\limits_{\partial H} v dO$.

3. (a) Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion $P_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf $\operatorname{span}\{a\}$. Wie sieht die Matrixdarstellung von P_a aus?

   (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ zwei orthogonale Vektoren. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion $P_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf $\operatorname{span}\{a,b\}$. Wie sieht die Matrixdarstellung von $P_{a,b}$ aus?

   (c) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar an $x = 0$. Rechnen Sie nach, dass $T_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ eine Projektion ist. Auf welchen Unterraum von $C[-1,1]$ wird hier projiziert? Ist T_n bezüglich des Standard-Skalarprodukts eine Orthogonalprojektion?

4. Auf $C[-1,1]$ ist das Standard-Skalarprodukt durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

gegeben.

   (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{span}\{1, x\} \subseteq C[-1,1]$.

   (b) Bestimmen Sie alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

   orthogonal auf U steht.

   (c) Bestimmen Sie ohne Differentialrechnung reelle Zahlen λ, μ so, dass der Ausdruck

$$\int_{-1}^{1} \left(\lambda + \mu t - t^2\right)^2 dt$$

   minimal wird!