3. UE Mathematik 3, 2.4.2014

1. Auf $C[0,1]$ sei das folgende innere Produkt gegeben

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\{1, x^3\}$ eine Orthogonalbasis von $U := span\{1, x^3\}$ ist. Bestimmen Sie außerdem eine Orthonormalbasis von U.

   (b) Finden Sie eine nicht triviale Funktion der Form

$$g(x) = a + bx + cx^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

   welche orthogonal auf U steht.

   (c) Finden Sie Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, sodass folgender Ausdruck minimal wird

$$\int_{-1}^{1} (\lambda + \mu x^3 - x^2)^2 |x| dx.$$

2. Setzen Sie die Funktion $f(x) = x^2$ vom Intervall $[0, \pi]$ <u>ungerade</u> auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ fort

   Entwickeln Sie die so erhaltende Funktion dort in eine Fourier-Reihe und bestimmen Sie deren Grenzverhalten mittels des Satzes von Dirichlet!

   Achtung: Die fortgesetzte Funktion stimmt nicht auf ganz $\mathbb{R}$ mit x^2 überein!

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = |\cos(x)|$ in eine Fourier-Reihe

   (a) auf dem Intervall $[0, \pi]$

   (b) auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

   (c) auf dem Intervall $[1, 1 + \pi]$.

   (d) Formulieren Sie die Parseval'sche Gleichung für die in (a), (b) und (c) erhaltenen Reihen!

   Hinweis: Bei Kenntnis der Fourier-Reihe aus (a) ergeben sich die Fourier-Reihen in (b) und (c) ganz automatisch!

4. Auf dem Intervall $[0, 4)$ sei die folgende Funktion gegeben

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion f. Bestimmen Sie außerdem die gerade und die ungerade Fortsetzung f_g und f_u von f auf $(-6, 6)$. Setzen Sie f, f_g und f_u periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

   (b) Entwickeln Sie f, f_g und f_u in Fourierreihen.

   (c) Bestimmen Sie das Grenzwertverhalten der Fourierreihen von f, f_g und f_u mittels des Satzes von Dirichlet!