

5. UE Mathematik 3, 14.5.2014

1. Gegeben ist die unbeschränkte inhomogene Wellengleichung

$$u_{xx} = u_{tt} + t + 5.$$

Zeigen Sie, dass eine partikuläre dieser Gleichung gegeben ist durch

$$u_p(x, t) = \frac{t^3}{6} + \frac{5}{2}t^2.$$

Lösen Sie die inhomogene Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = x^2.$$

2. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = 9u_{tt}, \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 17, \quad u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{5x}{2}\right).$$

3. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq 2$ und $t \geq 0$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - \sin(4\pi x).$$

4. Man löse die Wärmeleitungsgleichung für einen Stab der Länge l , der mit seiner Umgebung in thermischem Gleichgewicht steht, d.h.

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Bestimmen Sie die Lösung für die konkrete Anfangsbedingung $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq l/2, \\ 0 & \text{für } x > l/2. \end{cases}$

5. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^2.$$