

Name:

Matr.Nr.:

Deckblatt nicht herunterreißen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!1. Gegeben sind Vektoren f und $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ eines Vektorraums \mathcal{V} mit Skalarprodukt.

- (a) Erklären Sie, wie man die Orthogonalprojektion von f auf den von $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ aufgespannten Unterraum berechnen kann und rechnen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Projektion tatsächlich eine orthogonale Projektion ist.
- (b) Beweisen Sie, dass diese Orthogonalprojektion jenes Element f^* im von $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ aufgespannten Unterraum ist, für welches der Abstand

$$\|f^* - f\|^2, \quad f^* = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots + a_n\phi_n \quad \text{mit } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

minimal wird!

- (c) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion konkret für $f(x) = x$, $\phi_1(x) = \cos(x)$, $\phi_2(x) = \sin 17x$ und $\mathcal{V} = C[-\pi, \pi]$.

6 Punkte (2+3+1)

2. Gegeben ist die PDE

$$u_t + e^{-x} u_x = u, \quad (1)$$

- (a) Klassifizieren Sie die PDE, d.h. bestimmen Sie die Ordnung und entscheiden Sie ob die PDE linear, quasilinear und/oder nichtlinear ist. Begründen Sie ihre Antwort!
- (b) Finden Sie jene Lösung von (1) welche zusätzlich die Anfangsbedingung $u(x, 0) = e^x$ erfüllt und machen Sie die Probe!

5 Punkte (1+4)

3. (a) Geben Sie konkret ein Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V \neq 0$, an, sodass $\int_F V d\mathbf{O} = 0$ für jede geschlossene Fläche F .
- (b) Geben Sie konkret ein Vektorfeld $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $W \neq 0$, an, sodass $\oint_C W dx = 0$ für jede geschlossene Kurve C .

2 Punkte (1+1)**BITTE WENDEN!**

4. (a) Geben Sie die allgemeine Lösung folgender PDE an, indem Sie zuerst die angegebene Transformation und dann eine geeignete Lösungsmethode Ihrer Wahl verwenden:

$$u_x + u_t = u_{xx}, \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \quad \text{und} \quad u(t, 0) = u(1+t, t) = 0,$$

$$X + T = x, \quad T = t.$$

- (b) Welche zusätzlichen Anfangs- bzw. Rand-Bedingungen sind bei der PDE aus (a) nötig um die Lösung eindeutig zu machen? Geben Sie sich selbst konkret solche Bedingungen vor und geben Sie jene nichttriviale Lösung an, welche zusätzlich Ihren Bedingungen genügt!

7 Punkte (5 + 2)

_____ / 20

Gutes Gelingen