Vorlesungsprüfung Mathematik 3 **15.6.2012**

Name: ....

Matr.Nr.: ....

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

1. Gegeben sind Vektoren f und $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt.

   (a) Geben Sie die Orthogonalprojektion f^* von f auf den von $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ aufgespannten Unterraum an und rechnen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Projektion tatsächlich eine Orthogonalprojektion ist, d.h. dass $f - f^*$ orthogonal auf den Unterraum steht.

   (b) Beweisen Sie, dass diese Orthogonalprojektion f^* jenes Element im von $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ aufgespannten Unterraum ist, für welches der Abstand

   $$\|f^* - f\|^2, \qquad f^* = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \ldots + a_n\phi_n \quad \text{mit } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

   minimal ist!

5 Punkte (2+3)

2. Ein Eisstanitzel (mit einer Kugel) hat die Form $S = S_1 \cup S_2$ mit

   $S_1 = \{(x, y, z) : x^2+y^2 = z, 0 \leq z \leq 1\}$ und $S_2 = \{(x, y, z) : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, 1 \leq z \leq 2\}$.

   Skizzieren Sie S und berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{V} = \nabla\left(3x + 2y + z^2\right)$ das Oberflächenintegral

   $$\iint\limits_{\partial S} \mathbf{V} d\mathbf{O}$$

4 Punkte

3. Gegeben ist die PDE

   $$tu_t + \frac{1}{x^2}\, u_x = 0,$$

   (a) Klassifizieren Sie die PDE, d.h. bestimmen Sie die Ordnung und entscheiden Sie ob die PDE linear, quasilinear und/oder nichtlinear ist. Begründen Sie ihre Antwort!

   (b) Finden Sie alle Lösungen der PDE und machen Sie die Probe!

   (c) Welche der folgenden Anfangsbedingungen lassen sich für die PDE erfüllen? Geben Sie, wenn möglich, die konkrete Lösung an bzw. begründen Sie warum keine Lösung existieren kann: (i) $u(0, x) = x$ bzw. (ii) $u(e^{9x^3}, 3x) = x$.

5 Punkte (1+2+2)

Bitte wenden!

4. Gegeben ist das Randwert-Problem für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, u(x,1) = \sin(\pi x). \tag{1}$$

   (a) Erklären Sie ob die PDE (1) linear ist und entscheiden Sie gegebenenfalls ob sie elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

   (b) Führen Sie für die PDE (1) den Separationsansatz durch und geben Sie die beiden erhaltenen eindimensionalen Randwertprobleme an.

   (c) Geben Sie die Lösung der PDE (1) an.

6 Punkte (1+1+4)

____ / 20

Gutes Gelingen