# Vorlesungsprüfung Mathematik 3 12.10.2012

Name: ....................................

Matr.Nr.: ...............................

**Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!**

**Sie können die Beispiele in beliebiger Reihenfolge bearbeiten!**

1. Gegeben ist der Vektorraum $C_e(\mathbb{R}^+)$ aller auf $\mathbb{R}^+$ stetigen Funktionen, für welche das gewichtete Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx$$
definiert ist.

   (a) Geben Sie eine Orthonormalbasis des von $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$ und $\phi_2(x) = x^2$ aufgespannten dreidimensionalen Unterraums an.
   Hinweis: Es kann hilfreich sein, zuerst das Integral $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ allgemein für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

   (b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\phi_2(x) = x^2$ auf den von $\phi_0(x) = 1$ und $\phi_1(x) = x$ aufgespannten zweidimensionalen Unterraum.

   (c) Finden Sie zwei Elemente $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^2$ sodass gleichzeitig $\langle \phi_i, \phi_j\rangle = \mathbf{x_i} \cdot \mathbf{x_j}$ für alle $i, j = 1, 2$ gilt. (Das Skalarprodukt $\mathbf{x_i} \cdot \mathbf{x_j}$ ist das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$)

**5 Punkte (3+1+1)**

2. Gegeben ist ein Halbzylinder
$$H := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq x \text{ und } 0 \leq z \leq 3\},$$
sowie das Vektorfeld
$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x, -4y, z).$$

   (a) Skizzieren Sie $H$, sowie das Vektorfeld $\mathbf{v}$ am oberen Rand von $H$ (d.h. für $z = 3$).

   (b) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{v}$ durch den gesamten Rand von $H$.

   (c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{v}$ durch die nichtebene Teilfläche des Randes von $H$.

**5 Punkte (1+2+2)**

**Bitte wenden!**

3. Gegeben ist die PDE
$$tu_t + \frac{1}{x}\,u_x = 0,$$
   (a) Klassifizieren Sie die PDE, d.h. bestimmen Sie die Ordnung und entscheiden Sie ob die PDE linear, quasilinear und/oder nichtlinear ist. Begründen Sie ihre Antwort!

   (b) Finden Sie alle Lösungen der PDE und machen Sie die Probe!

   (c) Welche der folgenden Bedingungen lassen sich für die PDE erfüllen? Geben Sie, wenn möglich, die konkrete Lösung $u(t,x)$ an bzw. begründen Sie warum keine Lösung existieren kann: (i) $u(0,x) = x$ bzw. (ii) $u(t,0) = t$.

**5 Punkte (1+2+2)**

4. Gegeben ist das Anfangs-Randwert-Problem für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$:
$$2u_t = u_{xx}, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin^2 \pi x. \tag{1}$$
   (a) Erklären Sie ob die PDE (1) linear ist und entscheiden Sie gegebenenfalls ob sie elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

   (b) Führen Sie für die PDE (1) den Separationsansatz durch und geben Sie die beiden erhaltenen eindimensionalen Probleme vollständig (d.h. mit eventuellen Rand- und Anfangsbedingungen) an.

   (c) Geben Sie die Lösung der PDE (1) an.

**5 Punkte (1+1+3)**

____ **/ 20**

# Gutes Gelingen