Prüfung Mathematik 3 — 14.6.2013

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben! Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Anworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen.

Name: .... Matr.Nr.: ....

1. Setzen Sie die Funktion $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x<0 \\ x \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$ vom Intervall $[-\pi, \pi)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Sei $f(x)$ diese Fortsetzung. Entwickeln Sie $f(x)$ in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf $[0, 2\pi]$ und beantworten Sie folgende Fragen!

   (a) Der Fourier-Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ lautet ....

   (b) Der Fourier-Koeffizient a_1 lautet ....

   (c) Der Fourier-Koeffizient b_1 lautet ....

   (d) Die Summe $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ lautet ....

   Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen $s_n(x)$ von f für $n \to \infty$

   (e) Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n(3\pi)$ lautet ....

10 Punkte (2+2+2+2+2)

2. Betrachten Sie das auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha^2\, \mathbf{x}\, \|\mathbf{x}\|^{3\alpha} + (1-\alpha^2)\, \boldsymbol{\omega}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist und $\boldsymbol{\omega} = (2/0/0)$. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Für welche Werte von α ist $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = -1$ ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (b) Sei $\alpha = 1$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt (0/0/0). Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_1\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (c) Sei $\alpha = 2$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt (0/0/0). Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_2\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (d) Für welche Werte von α ist $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ nur für $\alpha = 0$ ☐ nur für $\alpha = \pm 1$ ☐ für alle α

   (e) Sei $\alpha = 0$. Das Vektorfeld $\mathbf{V}_0$ besitzt
   ☐ ein skalares Potential und zwar ....
   ☐ ein Vektor-Potential und zwar ....
   ☐ weder ein skalares noch ein Vektorpotential

10 Punkte (2+2+2+2+2)

3. (a) i. Was versteht man definitionsgemäß unter den Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung?

   Geben Sie bitte nur die Definition (und keine Äquivalenzen) an!

   ii. Fertigen Sie eine aussagekräftige und akkurate <u>Skizze</u> der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $4yu_x(x,y) - xu_y(x,y) = 0$ an!

   iii. Die Gleichung $4yu_x(x,y) - xu_y(x,y) = 0$ mit Randbedingung $u(2\sqrt{1-y^2}, y) = 0$ (für $-1 \leq y \leq 1$) besitzt

   ☐ keine Lösung ☐ genau eine Lösung ☐ unendlich viele Lösungen

   (b) i. Geben Sie die d'Alembert'sche Darstellung der Lösung der <u>beidseitig</u> unbeschränkten Wellengleichung an:

   $$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

   ii. Verwenden Sie das Reflexionsprinzip um folgende <u>einseitig</u> unbeschränkte Wellengleichung zu lösen:

   $$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x \text{ und } u(0,t) = 0 \text{ für } x \geq 0, t \geq 0.$$

   iii. Skizzieren Sie die Lösung aus (ii) zum Zeitpunkt $t = 1$ für $x \geq 0$.

10 Punkte (5+5)

4. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab der Länge 2, welcher an seinen Enden im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung steht.

   $$u_t(x,t) = \sigma u_{xx}(x,t), \qquad u_x(-1,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0.$$

   (a) Erklären Sie die Bedeutung der Konstanten $\sigma > 0$ in der Wärmeleitungsgleichung.

   (b) Führen Sie für die obige Gleichung auf $[-1,1]$ den Separationsansatz durch und geben Sie möglichst viele Lösungen an, welche von der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$ sind!

   (c) Geben Sie für $\sigma = 2$ die allgemeine Lösung der obigen Gleichnung an, sowie speziell jene Lösung, welche zusätzlich erfüllt:

   $$u(x,0) = 1 + \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right).$$

10 Punkte (1+6+3)