Vorlesungsprüfung Mathematik 3 18.1.2013

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben! Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Anworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen.

Name: .... Matr.Nr.: ....

1. Setzen Sie die Funktion $g(x) = \pi + x$ vom Intervall $[-\pi, 0)$ π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Sei $G(x)$ diese Fortsetzung. Entwickeln Sie $G(x)$ in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf $[-\pi, \pi]$ und beantworten Sie folgende Fragen!

   (a) G ist ☐ gerade ☐ ungerade ☐ weder gerade noch ungerade

   (b) Der Fourier-Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ lautet ....

   (c) Der Fourier-Koeffizient b_6 lautet ....

   (d) Der Wert der unendlichen Reihe $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ beträgt ....

   Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen $s_n(x)$ von G für $n \to \infty$

   (e) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\pi)$ lautet ....

   10 Punkte (2+2+2+2+2)

2. Betrachten Sie das auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix},$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Für welche Werte von α ist $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = -1$ ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (b) Sei $\alpha = 1$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_1 \, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (c) Sei $\alpha = 1$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1,1,1)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_1 \, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (d) Für welche Werte von α ist $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = -1$ ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (e) Sei $\alpha = 0$ und C die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$, welche sich in der Ebene $x+y+z=0$ befindet. Der Wert des Kurvenintegrals $\oint_C \mathbf{V}_0 \, d\boldsymbol{x}$ beträgt: ....

   10 Punkte (2+2+2+2+2)

3. (a) Zeigen Sie: Sind $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ paarweise orthogonale Elemente eines Vektorraums mit Skalarprodukt, dann sind sie auch linear unabhängig, d.h. zeigen Sie dass jede Linearkombination

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n = \mathbf{o}$$

trivial ist. Gegeben Sie ein konkretes Beispiel an, das zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt!

(b) Wie lautet die zweite Green'sche Formel in der Ebene

$$\iint_D (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy = \ldots\ldots \quad ?$$

Geben Sie die komplette Formel an und erklären Sie alle darin vorkommenden Symbole und Begriffe!

8 Punkte (4+4)

---

4. Gegeben ist das Randwert-Problem für $0 \le x \le \pi$ und $0 \le y \le \pi$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u(0, y) = u(\pi, y) = 0$$

(a) Führen Sie für die obigen Gleichung den Separationsansatz durch und geben Sie **alle** Lösungen an, welche von der Gestalt $u(x, y) = X(x)Y(y)$ sind!

(b) Geben Sie speziell jene Lösung der obigen Gleichung an, welche zusätzlich

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x, \pi) = \sin(x)$$

erfüllt!

12 Punkte (8+4)
