**Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI**

**am 7. März 2014**

ZUNAME: ........................

Vorname: ........................

Kennzahl: ........................

Mat.Nr.: ........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1,\dots,\varphi_m$.
   Zeigen Sie, dass für $m\in\mathbb{N}$, $d_1,\dots,d_m\in\mathbb{R}$ und $f\in\mathcal{V}$ stets
   $$\|f-(c_1\varphi_1+\cdots+c_m\varphi_m)\|\le\|f-(d_1\varphi_1+\cdots+d_m\varphi_m)\|,$$
   wenn
   $$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle,\qquad k=1,\dots,m.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems
   $$y''+\omega^2\,y=0,\qquad y'(0)=y'(\pi)=0.$$
   Hinweis: Es ist $\omega^2\ge 0$.

   (b) Entwickeln Sie die auf $[0,\pi]$ definierte Funktion
   $$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$
   in eine Fourierreihe bezüglich der Eigenfunktionen des Randwertproblems aus (a).
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von $f$ an $x=\frac{\pi}{2}$?

3. Gegeben sei das auf $\mathbb{R}^3\backslash\{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld
   $$\boldsymbol{V}_\alpha(x,y,z)=\frac{1}{(x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$
   wobei $\alpha\in\mathbb{R}$ ein Parameter ist.

   (a) Bestimmen Sie jene Werte von $\alpha$ für die $\operatorname{div}\boldsymbol{V}_\alpha=0$ ist.

   (b) Bestimmen Sie jene Werte von $\alpha$ für die $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}_\alpha=\boldsymbol{o}$ ist.

   (c) Es sei $\alpha=0$ und $S$ die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Verwenden Sie einen geeigneten *Integralsatz* zur Bestimmung des Oberflächenintegrals
   $$\iint_S \boldsymbol{V}_0\,d\boldsymbol{O}.$$

4. Für $0\le x\le 2$, $t\ge 0$ seien $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ Lösungen des Rand-Anfangswertproblems
   $$u_{tt}=u_{xx},\qquad u(0,t)=u(2,t)=0,\qquad u(x,0)=x^{17},\quad u_t(x,0)=x^{42}.\tag{1}$$
   Zeigen Sie, dass dann $u_1=u_2$ gelten muss, also die Lösung von (1) eindeutig ist.
   Hinweis: Es gibt KEINE PUNKTE, wenn Sie mit Hilfe des Separationsansatzes oder der Lösungsformel von d'Alembert eine Lösung von (1) bestimmen.