1. Übung zur Komplexen Analysis

1. Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die $z^5 = -32$ gilt.

2. Berechnen und skizzieren Sie
$$\sqrt[3]{1-i}, \quad \sqrt[n]{-1}, \quad \sqrt[n]{i} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

3. Stellen Sie die folgenden Mengen graphisch dar:
   (i) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-3i)| \leq 2\}$;
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z-i)(1+i)) > 0\}$;
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+3|\}$;
   (iv) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + |z+i| = 2\}$.

4. Sei $|z-1| = 1$. Man zeige
$$\arg(z-1) = 2\arg z = \frac{2}{3}\arg(z^2 - z).$$

5. Man zeige, dass wenn z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, dann gilt
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

6. Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, und alle $a, z \in \mathbb{C}$
$$(z+a)^{2n} - (z-a)^{2n} = 4anz \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 + a^2 \cot^2 \frac{k\pi}{2n} \right).$$
Hinweis: Betrachten Sie beide Seiten der Gleichung als Polynome in z und zeigen Sie, dass die Nullstellen übereinstimmen.

7. Man zeige, dass die Identität und das Konjugieren die einzigen stetigen Körperisomorphismen von $\mathbb{C}$ sind.

8. Zeigen Sie, dass die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und -multiplikation einen Körper bildet, der isomorph zu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist. Drücken Sie $|z|$ und $\bar{z}$ durch obige Matrix aus.