

# 1. Übung zur Komplexen Analysis

1. Berechnen Sie:

$$\sqrt[3]{1-i}, \sqrt[n]{-1}, \sqrt[n]{i} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

(mit Skizze!)

2. Stellen Sie graphisch dar:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - 3i)| \leq 2\}; \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z - i)(1 + i)) > 0\};$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z + 3|\}; \{z \in \mathbb{C} : |z| + |z + i| = 2\}.$$

3. Sei  $|z - 1| = 1$ . Man zeige:

$$\arg(z - 1) = 2 \arg z = \frac{2}{3} \arg(z^2 - z)$$

4.  $\mathbb{R}[x]$  bezeichne den Ring aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Durch

$$P_1(x) \sim P_2(x) \iff P_1(x) - P_2(x) \text{ ist durch } x^2 + 1 \text{ ohne Rest teilbar}$$

wird auf  $\mathbb{R}[x]$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  definiert. Die Menge der dadurch festgelegten Äquivalenzklassen bildet mit den in der üblichen Weise definierten Operationen  $+$  und  $\cdot$  den Quotientenring  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ . Geben Sie einen Isomorphismus zwischen  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  und  $\mathbb{C}$  an. (Dieses Modell von  $\mathbb{C}$  stammt von Cauchy.)

5. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?

$$\begin{aligned} f(z) &= (\bar{z})^2 \\ f(z) &= \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x} \\ f(z) &= \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y) \end{aligned}$$

Hier ist  $z = x + iy$ .

6. Zeigen Sie: Eine holomorphe Funktion ist auf einem zusammenhängenden Definitionsbereich durch ihren Imaginärteil bis auf Addition einer (reellen) Konstanten eindeutig festgelegt.
7. Bestimmen Sie zu  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  alle Funktionen  $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $u$  und  $v$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz  $\mathbb{C}$  erfüllen:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$$

8. Zeigen Sie: Ist  $f$  holomorph auf einem Gebiet  $G$  und gilt  $|f| = \text{const.}$ , dann ist  $f$  konstant auf  $G$ .